SISSIS

Sezione di Catania

Anno 2003-2004

V Ciclo

LA STATICA: Le macchine semplici

di

Elena La Guidara

Tesina

del

Corso di Fondamenti della Fisica I

Prof. V. Bellini

INDICE

3. LE MACCHINE SEMPLICI

LA STATICA

Premessa

La prima parte di questa tesina è stata concepita in modo tale da poter fornire le nozioni base di equilibrio e di condizioni per determinarlo, sia nel caso del punto materiale, che nel caso di corpi rigidi liberi e vincolati.

Nella seconda parte, invece, l'attenzione è rivolta a qualche semplice applicazione delle condizioni di equilibrio introdotte, in modo tale da poter far capire quanto e come le nozioni teoriche siano utilizzate nella vita quotidiana.

In particolare saranno descritti alcuni dispositivi sperimentali, chiamati macchine semplici.

Lo scopo fondamentale che si è cercato di raggiungere è stato esclusivamente quello della comprensione; pertanto la trattazione effettuata è semplice e comprensibile, accompagnata sempre da esempi, in modo tale che lo studente, possa essere aiutato, e soprattutto incuriosito, dallo studio condotto.

In particolare, questa tesina, è stata sviluppata per studenti della Scuola media superiore, è può essere facilmente discussa in un terzo liceo, o anche in un primo anno di un istituto tecnico industriale.

Si richiedono alcuni ***prerequisiti***, che consentono la trattazione dell'argomento.

Lo studente deve quindi già conoscere:

- La nozione di grandezza scalare e vettoriale;
- Operazioni con i vettori: Somma e Differenza di due vettori; Prodotto scalare e vettoriale;
- Definizione di Forza e sua misura;
- Il terzo principio della dinamica .

Obiettivi:

- Saper scomporre e comporre le forze ai fini dell'equilibrio dei corpi;
- Saper calcolare il momento di una forza;
- Saper determinare il baricentro dei corpi;
- Saper distinguere se un corpo è in equilibrio stabile, instabile o indifferente;
- Saper progettare semplici esperimenti riguardanti l'equilibrio dei corpi sospesi e dei corpi appoggiati;
- Conoscere e saper usare a proprio vantaggio alcune macchine semplici

INTRODUZIONE

La statica studia le condizioni di equilibrio dei corpi.

Se ad un corpo sono applicate due o più forze, ossia ***un sistema di forze***, si dice che esse ***si fanno equilibrio quando globalmente non alterano lo stato di quiete o di moto del corpo.***

Ciò implica che se il corpo è inizialmente in quiete, sotto l'azione di un sistema di forze che si fanno equilibrio, esso permane nel suo stato di quiete, se invece è inizialmente in moto con velocità costante, esso continua a muoversi con velocità costante, senza che niente alteri il suo stato di moto.

In questa tesina sarà trattato il problema di corpi inizialmente in quiete, ovvero il problema dell'equilibrio statico.

In particolare saranno trattate le condizioni che devono essere soddisfatte perché un punto materiale, libero di muoversi in tutte le direzioni, rimanga in equilibrio sotto l'azione simultanea di n forze e le condizioni di equilibrio per un corpo rigido, ovvero per un corpo in cui la mutua distanza di due qualunque suoi punti si mantiene costante nel tempo, qualunque sollecitazione il corpo subisca.

In realtà corpi perfettamente rigidi non esistono, per cui il corpo rigido è solo un modello astratto; però esso trova riscontro pratico in tutti quei corpi reali che, grazie alle loro caratteristiche tecniche, si deformano in modo trascurabile anche quando vengono sottoposti all'azione di forze notevoli.

L'argomento sarà sviluppato, nelle linee generali, come segue:

- Statica del punto materiale;
- Statica del corpo rigido;
- Le macchine semplici

1. STATICA DEL PUNTO

1.1 Punto materiale

Determinare le condizioni che mantengono un oggetto in equilibrio è un problema che può essere molto complesso

Si pensi ad esempio ad un grattacielo o ad un ponte. Ogni piccolo volume di materia di cui sono costituiti deve restare in equilibrio anche in condizioni difficili, come per esempio le continue sollecitazioni del traffico per un ponte.

In questo paragrafo sarà studiato il caso più semplice di equilibrio; quello che riguarda il *Punto Materiale*.

Con questo termine si indica un *oggetto ideale cosi piccolo da poter essere equiparato ad un punto*. Esso può spostarsi nello spazio, ma non ruotare su se stesso, dal momento che non ha dimensioni, cioè non ha lunghezza, né larghezza, né altezza.

Mentre il punto geometrico è un'entità astratta, priva di proprietà fisiche, si può considerare punto materiale un qualsiasi corpo reale, purché le sue dimensioni siano trascurabili rispetto a quelle dell'ambiente; per esempio: una formica su un prato, una nave sull'oceano, un pianeta nell'universo possono essere considerati punti materiali.

Il punto materiale *è un modello privo di volume, ma dotato di massa, che si suppone tutta concentrata nel punto stesso.*

Sperimentalmente, quindi, si assumono, come punti materiali, piccoli "corpicciuoli", di cui si ritengono trascurabili le dimensioni geometriche.

Ci chiediamo:

" In quali condizioni un tale punto, libero di muoversi in tutte le direzioni, sta in equilibrio sotto l'azione simultanea di n forze $\boldsymbol{F_1}, \boldsymbol{F_2} \ldots\ldots \boldsymbol{F_n}$ *?"*

NOTA: Movimento, equilibrio si intendono rispetto ad una terna d'assi fissa al suolo, alla quale sia anche fisso l'osservatore.

1.2 Equilibrio di un punto materiale libero

Una forza applicata

Se ad un punto materiale, libero di muoversi, inizialmente in quiete, è applicata una sola forza **F**, il punto si mette in movimento nella direzione e nel verso della forza; di conseguenza *un tale punto NON starà mai in equilibrio sotto l'azione di una sola forza*.

Due forze applicate

Si consideri adesso il caso in cui al corpicciuolo P siano applicate le due forze $\mathbf{F_1}$ e $\mathbf{F_2}$, aventi i moduli uguali, rispettivamente a quelli del pesi P_1 e P_2 , come mostrato in figura 1.1.

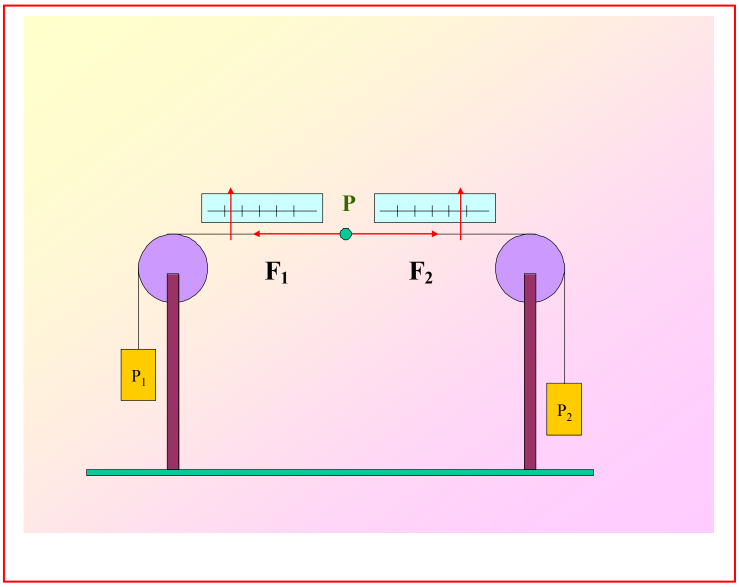


Figura 1.1: Rappresentazione di due forze opposte con la stessa retta d'azione applicate allo stesso punto materiale P.

Se i due pesi sono uguali il punto P rimane in equilibrio, qualunque sia la sua posizione tra le due carrucole.

Di conseguenza:

“ Due forze $\boldsymbol{F_1}$ *e* $\boldsymbol{F_2}$ *si fanno equilibrio se sono uguali ed opposte. In formule:*

$$\boldsymbol{F_1 = - F_2}$$”

NOTA: In tal caso la risultante **R** delle due forze è nulla. Si osserva facilmente che la Risultante di due forze altro non è che la somma vettoriale dei due vettori $\mathbf{F_1}$ e $\mathbf{F_2}$.

Il punto P starà effettivamente fermo solo se inizialmente è fermo. Ogni posizione di P sulla retta d’azione delle due forze è posizione di equilibrio.

Viceversa, *se un punto materiale è in equilibrio sotto l’azione di due forze, queste devono avere ampiezza uguale e direzioni opposte.*

Tre forze applicate

Si consideri il caso in cui al corpicciuolo P siano applicate tre forze $\mathbf{F_1}$, $\mathbf{F_2}$ ed $\mathbf{F_3}$, realizzate rispettivamente per mezzo di tre, quattro e cinque pesi tutti uguali tra loro e fissati ai tre punti che partono da P, come mostrato in figura 1.2.

I fili danno le direzioni delle tre forze applicate a P; mentre i pesi $\mathbf{F_1}$, $\mathbf{F_2}$ ed $\mathbf{F_3}$ dei corpi applicati hanno gli stessi **valori** $\mathbf{F_1}$**,** $\mathbf{F_2}$ **,** $\mathbf{F_3}$ di queste forze.

Rappresentando graficamente le forze, si verifica che, nella configurazione di equilibrio, la diagonale R del parallelogrammo costruito su $\mathbf{F_1}$, $\mathbf{F_2}$ è uguale ed opposta ad $\mathbf{F_3}$ (**E**).

Questa è la classica esperienza *del parallelogrammo delle forze.*

Una forza rappresentata graficamente da **R**, uguale ed opposta ad $\mathbf{F_3}$, fa equilibrio a quest'ultima; anche $\mathbf{F_1}$ ed $\mathbf{F_2}$, agendo simultaneamente fanno equilibrio ad $\mathbf{F_3}$; dunque due forze hanno lo stesso effetto di una sola ottenuta da quella con la regola del parallelogrammo.

Si giustifica così il nome di ***somma vettoriale* o *risultante*** dato alla forza **R.**

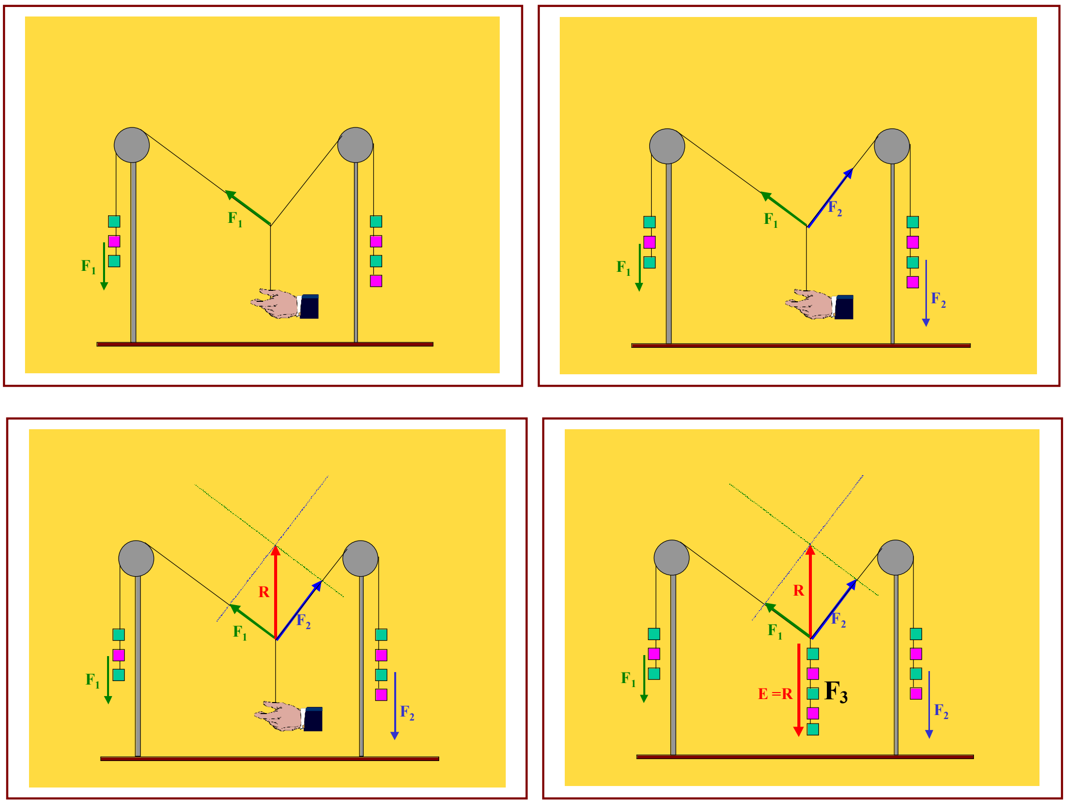


Figura 1.2: Rappresentazione di tre forze applicate allo stesso punto materiale P. Questa è la classica esperienza *del parallelogrammo delle forze.*

NOTA: Nella figura 1.3 è riportato il modo in cui si costruisce graficamente il vettore che rappresenta la risultante **R** di due forze $\mathbf{F_1}$ ed $\mathbf{F_2}$ applicate allo stesso punto P.

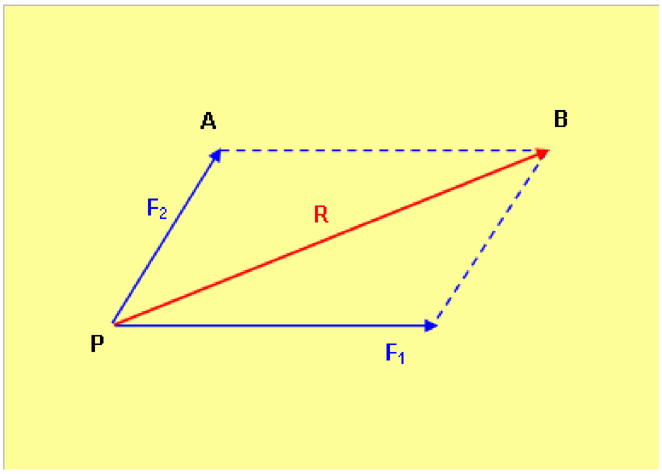


Figura 1.3: La forza **R** è la risultante delle forze $\mathbf{F_1}$ e $\mathbf{F_2}$ applicate allo stesso punto P.

L'operazione con cui si determina la risultante di due forze $\mathbf{F_1}$ ed $\mathbf{F_2}$ si chiama *composizione* delle forze assegnate, mentre $\mathbf{F_1}$ ed $\mathbf{F_2}$ si chiamano *forze componenti o* semplicemente *componenti.*

In particolare una forza può sempre pensarsi risultante dei suoi tre componenti $\mathbf{F_x}$, $\mathbf{F_y}$ ed $\mathbf{F_z}$ lungo tre assi cartesiani qualunque.

Dalla costruzione segue che le intensità delle forze $\mathbf{F_1}$ ed $\mathbf{F_2}$ e della loro risultante sono le misure dei lati del triangolo PAB. Pertanto, poiché in un triangolo un lato è maggiore della differenza degli altri due e minore della loro somma, si deduce facilmente che *l'intensità della risultante di due forze è maggiore della differenza e minore della somma delle due forze componenti.*

L'intensità della risultante è uguale alla somma delle intensità delle componenti soltanto nei casi in cui le due componenti hanno la stessa direzione e lo stesso verso, mentre è uguale alla differenza delle intensità nel caso in cui le componenti hanno la stessa direzione e versi opposti.

Si definisce invece ***equilibrante,*** la forza uguale ed opposta alla risultante (nel caso considerato è proprio la forza $\mathbf{F_3}$).

Chiaramente se ad un corpo è applicato un certo sistema di forze, l'ulteriore applicazione al corpo stesso dell'equilibrante di un tale sistema di forze fa si- come dice del resto il suo nome- che il sistema di forze globale sta in equilibrio. E quindi anche, se un sistema di forze è in equilibrio, una qualunque delle forze è la equilibrante delle rimanenti.

Con considerazioni geometriche, infatti, ritornando alla figura 1.2, si dimostra facilmente che la somma $\mathbf{F_2} + \mathbf{F_3}$ dà un vettore $\mathbf{R_{23}}$ uguale ed opposto a $\mathbf{F_1}$ ($\mathbf{F_1}$ quindi è l'equilibrante di $\mathbf{F_2}$ ed $\mathbf{F_3}$); la somma $\mathbf{F_3} + \mathbf{F_1}$ dà un vettore $\mathbf{R_{31}}$ uguale ed opposto a $\mathbf{F_2}$ (che è quindi l'equilibrante delle forze $\mathbf{F_3}$ ed $\mathbf{F_1}$).

Fisicamente ciò è naturale:

"Due qualunque delle tre forze devono fare equilibrio alla rimanente".

Un numero qualunque di forze applicate

Se ad un punto materiale è applicato un sistema di più forze complanari, comunque orientate, si può determinare la risultante mediante successive applicazioni della regola del parallelogrammo, trovando prima la risultante $\mathbf{R_1}$ di due forze, poi la risultante $\mathbf{R_2}$ della $\mathbf{R_1}$ trovata con una terza forza del sistema e cosi via fino ad esaurire tutte le forze.

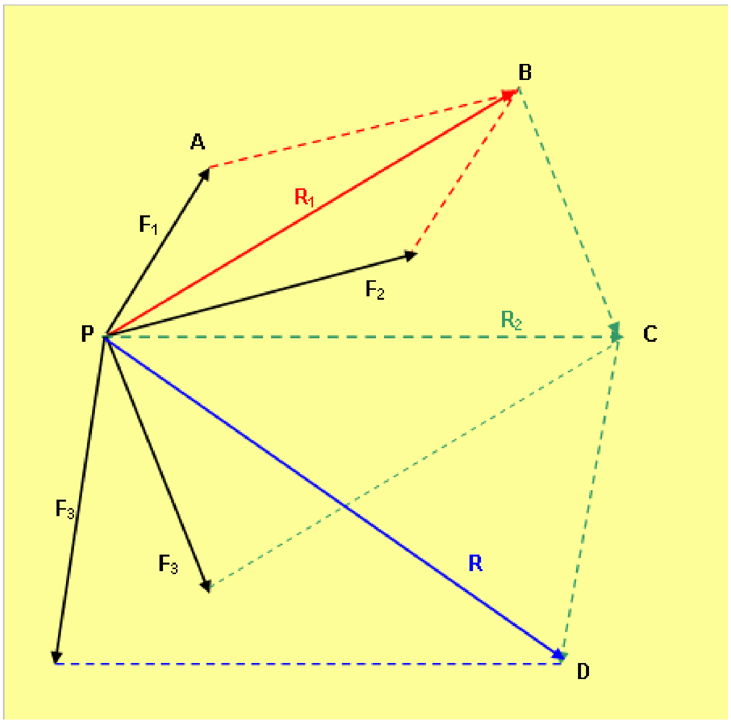


Figura 1.4: Costruzione della risultante **R** delle quattro forze $\mathbf{F_1}$, $\mathbf{F_2}$, $\mathbf{F_3}$ e $\mathbf{F_4}$ applicate nello stesso punto P; Regola del poligono chiuso.

L'ultima risultante **R** è equivalente al sistema delle forze nel senso che da sola produce lo stesso effetto del sistema.

La costruzione geometrica della risultante è illustrata in figura 1.4.

In pratica, come dimostra la stessa figura, un semplice procedimento grafico, noto come ***poligono delle forze,*** evita la ripetuta applicazione della regola del parallelogrammo. E' possibile infatti costruire, a partire dalla punta della freccia del vettore rappresentante una forza del sistema, tanti vettori uguali a quelli che rappresentano le altre forze del sistema: quindi partendo dall'estremo A del primo vettore, si traccia il segmento AB parallelo al vettore $\mathbf{F_2}$ e di lunghezza F_2. Dall'estremo B si conduce poi il segmento BC parallelo a $\mathbf{F_3}$ e di lunghezza F_3, e dall'estremo C si conduce poi il segmento CD parallelo a $\mathbf{F_4}$ e di lunghezza F_4.

La risultante è individuata dal vettore con origine nel punto di applicazione della prima forza e con estremo coincidente con la punta (D) della freccia dell'ultimo vettore.

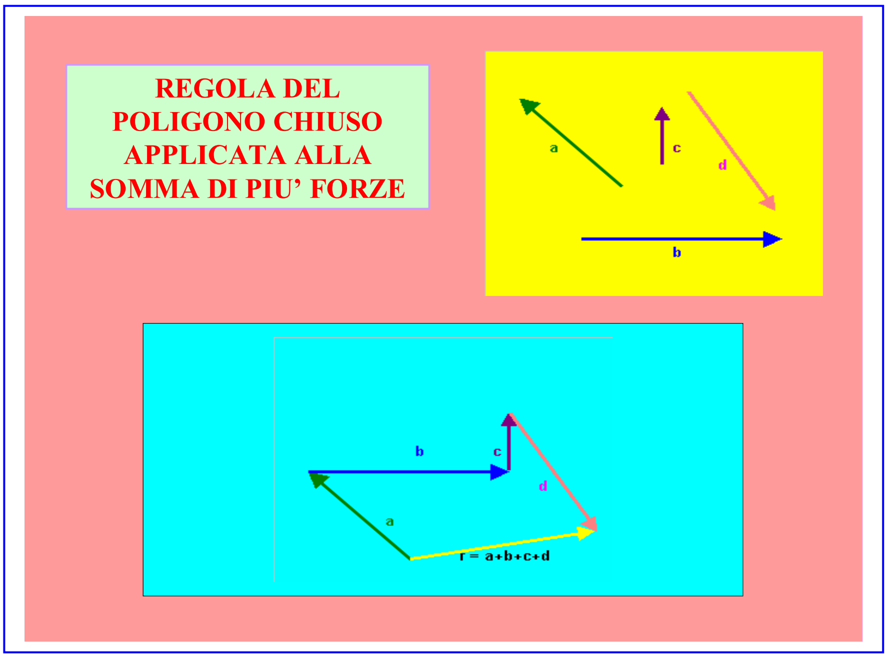


Figura 1.5: Rappresentazione della regola del poligono chiuso nel caso di un sistema di forze che ammette risultante nulla.

Per l'equilibrio di queste n forze si osserva che gli esempi considerati nel caso di due (figura 1.1) o di tre (figura 1.2) forze possono essere, come l'esperienza conferma, generalizzati a casi di punti materiali soggetti ad un numero qualsiasi di forze. Pertanto più forze applicate ad uno stesso punto costituiscono **un sistema equilibrato**, nel senso che **il punto materiale rimane in equilibrio, se la risultante del sistema di forze è nulla**; in tal caso la poligonale delle forze deve essere una spezzata chiusa, come mostra la figura 1.5 ottenuta nel caso di quattro forze assegnate.

Considerando un sistema di coordinate cartesiane, la condizione di equilibrio relativa ad un qualsiasi numero di forze $\mathbf{F}_1$, $\mathbf{F}_2$ ....$\mathbf{F}_n$ può quindi essere scritta nella forma:

$$\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \mathbf{F}_3 + \dots\dots\dots \mathbf{F}_n = 0$$

Si noti che, se sono più di tre, le forze non devono più necessariamente essere complanari perché si abbia equilibrio; la poligonale delle forze può non essere piana.

In componenti, l'equazione precedente, condizione necessaria e sufficiente per l'equilibrio delle *n forze applicate a un punto*, si scrive:

$$F_{1x} + F_{2x} + F_{3x} + \dots\dots\dots F_{nx} = 0$$
$$F_{1y} + F_{2y} + F_{3y} + \dots\dots\dots F_{ny} = 0$$
$$F_{1z} + F_{2z} + F_{3z} + \dots\dots\dots F_{nz} = 0$$

L'equazione vettoriale precedente, infatti, deve necessariamente valere per ognuna delle componenti delle forze, perché altrimenti la forza risultante non sarebbe nulla. Se tutte le forze agenti sul punto materiale giacciono nel piano *x y* l'ultima delle tre relazioni precedenti è ovviamente sempre vera.

In definitiva:

" *La condizione perché un punto materiale libero sia in equilibrio sotto l'azione di più forze è che la loro risultante sia nulla:*

R =0 ".

1.3 Condizione di equilibrio di un punto materiale vincolato

Difficilmente capita che un oggetto sia del tutto libero di muoversi nello spazio. Più spesso può compiere alcuni spostamenti, mentre altri sono proibiti. Per esempio, una pallina appoggiata su un tavolo può muoversi in lungo e in largo sulla sua superficie, può anche essere sollevata, ma è impossibile spostarla sotto il livello del piano.

Un sasso appeso ad un filo che pende dal soffitto è vincolato a muoversi soltanto su una superficie sferica (figura 1.6). Un treno è obbligato a spostarsi senza uscire dalle rotaie.

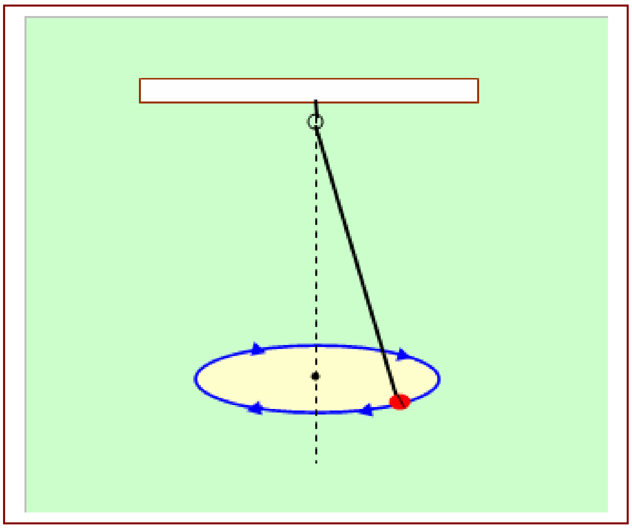


Figura 1.6: Il sasso non è libero di muoversi dovunque nello spazio. Il vincolo, cioè il filo che lo sostiene, costringe il sasso a spostarsi sulla superficie di una sfera, che ha il raggio uguale alla lunghezza del filo e il centro nel punto in cui il filo è appeso al soffitto.

Tutti questi oggetti sono sottoposti a dei vincoli.

Più precisamente ***un vincolo*** *è un oggetto che limita la libertà di movimento di un altro oggetto* (per maggiori dettagli vedere paragrafo 2.6). Negli esempi precedenti, i vincoli sono il tavolo, il filo a cui è appeso il sasso e le rotaie.

E' evidente che i vincoli esercitano delle forze per condizionare i movimenti di questi oggetti.

Un oggetto appoggiato sul tavolo, ad esempio, malgrado il suo peso, non sprofonda, ma resta fermo. Ciò vuol dire che ad esso è applicata una forza uguale e contraria al suo peso.

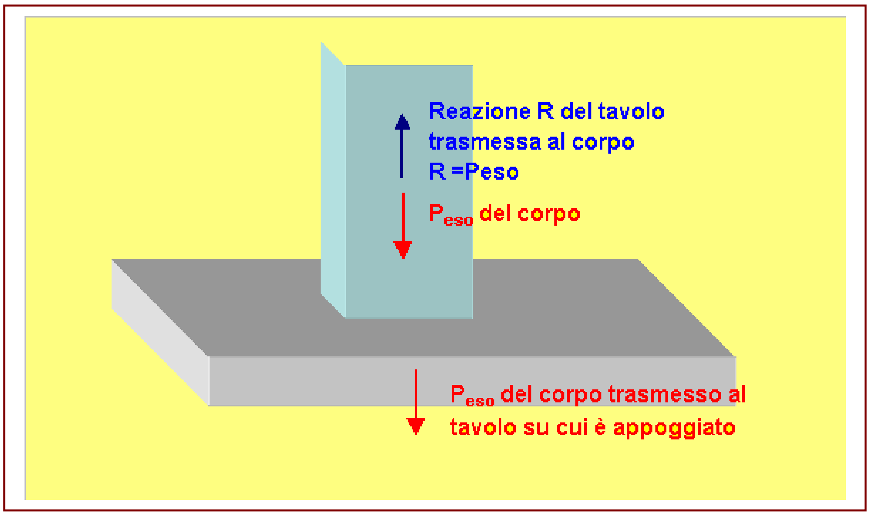


Figura 1.7: Un oggetto, appoggiato sul tavolo, essendo fermo, subisce una forza totale uguale a zero. Ciò significa che la forza di gravità, che lo attrae verso il basso, è equilibrata da una forza di uguale intensità, ma diretta verso l'alto, esercitata dal tavolo.
Quest'ultima si chiama reazione vincolare ed è causata dall'elasticità del tavolo (cioè il vincolo), che si deforma leggermente sotto il peso del corpo.

Questa forza, che si chiama *forza vincolare,* dovuta all'elasticità del tavolo. Quando appoggiamo un oggetto, la superficie del tavolo si deforma in modo impercettibile, come se fosse un tappeto elastico (ma estremamente rigido). Man mano che la superficie si comprime, esercita una forza sempre più grande verso l'alto fino a che riesce a controbilanciare il peso del corpo.

La forza vincolare non è sempre uguale, ma dipende dalla forza a cui deve reagire. Se appoggiamo sul tavolo un oggetto leggero, la superficie si deforma poco e risponde con una forza piccola. Se invece l'oggetto è pesante, la forza vincolare necessaria per tenerlo in equilibrio è maggiore. Appoggiando pesi sempre più grandi si arriva ad un limite di rottura, in cui la struttura elastica del tavolo non ce la fa più a reagire a sollecitazioni.

Quindi, la forze vincolari assumono valori diversi a seconda della forza a cui devono reagire, ma hanno un massimo oltre al quale non vanno.

Anche quando sospendiamo un oggetto ad un filo si crea una forza vincolare. Il filo, per effetto delle sollecitazioni, si allunga (come se fosse una molla) fino a controbilanciare la forza di gravità dell'oggetto. Se però l'oggetto è troppo pesante il filo si spezza.

Per un punto materiale vincolato la condizione di equilibrio è del tutto simile a quella per il punto materiale libero. L'unica differenza è che tra le forze in gioco vi sono anche quelle vincolari.

Quindi:

" La condizione perché un punto materiale vincolato sia in equilibrio è che la somma di tutte le forze che gli sono applicate (comprese quelle vincolari) sia uguale a zero".

2. STATICA DEL CORPO RIGIDO

2.1. Corpo rigido

Gli oggetti che si incontrano nell'esperienza di tutti i giorni non sono semplici punti materiali. Hanno un'estensione e le forze che agiscono su di essi non sono, di solito, applicate ad uno stesso punto, ma a punti diversi. È naturale, allora, chiedersi quale sia *la condizione perché varie forze applicate a punti diversi di uno stesso oggetto si facciano equilibrio.*

Un corpo reale soggetto ad una forza tende sempre in qualche misura a deformarsi, ma per semplificare la trattazione saranno considerati solo corpi rigidi.
Un corpo è rigido se, sottoponendolo all'azione di qualunque forza, non subisce deformazioni. In maniera più rigorosa, si dice che un **corpo è rigido** *se, presi due suoi punti qualsiasi, la distanza tra di essi si mantiene costante nel tempo, qualunque sollecitazione il corpo subisca.*

Naturalmente si tratta di una ipotesi che semplifica il problema (consente, infatti, di trascurare gli effetti di deformazione che hanno le forze), visto che in natura non esistono oggetti assolutamente indeformabili.
Un corpo non rigido sotto l'azione di una forza può stirarsi, comprimersi, torcersi. Un corpo rigido, invece, può solo spostarsi o ruotare su se stesso.
Il corpo rigido è solo un modello astratto, che però trova riscontro pratico in tutti quei corpi reali che, grazie alle loro caratteristiche tecniche, si deformano in modo trascurabile anche quando vengono sottoposti all'azione di forze notevoli. Quindi quanto sarà detto dei corpi rigidi potrà applicarsi ad oggetti reali tanto meglio quanto meno essi sono deformabili.

Una forza, purché applicata ad un corpo rigido, gode di due importanti proprietà vettoriali:

1. Una forza può essere spostata lungo la propria retta d'azione, cioè lungo la retta sulla quale giace, senza che siano alterate le condizioni di equilibrio del sistema rigido. In riferimento alla figura 2.1, la forza **F** può essere applicata in qualsiasi punto del corpo sulla propria retta d'azione, senza che siano alterate le condizioni di equilibrio.

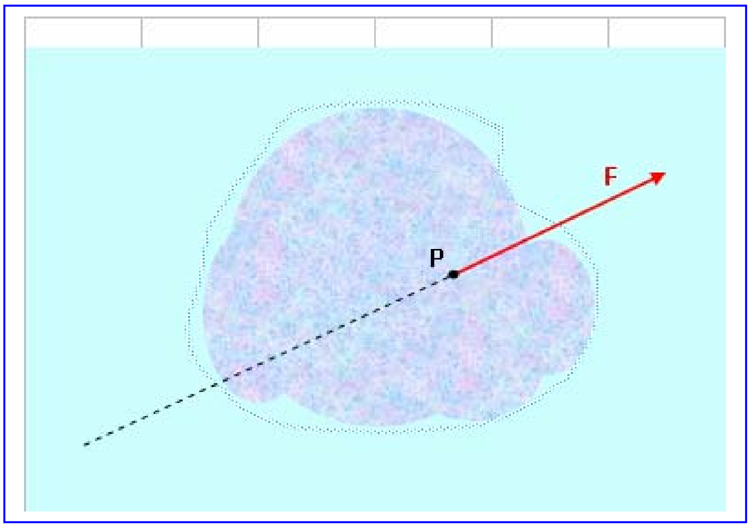


Figura 2.1: La forza F, agente su un sistema rigido, può considerasi applicata sulla retta d'azione in qualsiasi punto del corpo.

2. Una forza può essere sostituita con due o più forze, la somma delle quali deve essere uguale alla forza data. Come conseguenza di ciò:
Se ad un sistema rigido sono applicate due forze opposte aventi la stessa retta d'azione (figura 2.2), oppure se tali forze sono soppresse, le condizioni di equilibrio del corpo non vengono alterate, cioè, se il corpo era in quiete rimarrà in quiete, se invece era in moto, il suo stato di moto non verrà alterato. In virtù di ciò segue che ad un corpo rigido si può sempre applicare

una qualunque forza, unitamente alla sua equilibrante, senza che ciò provochi alcun effetto sul corpo stesso.

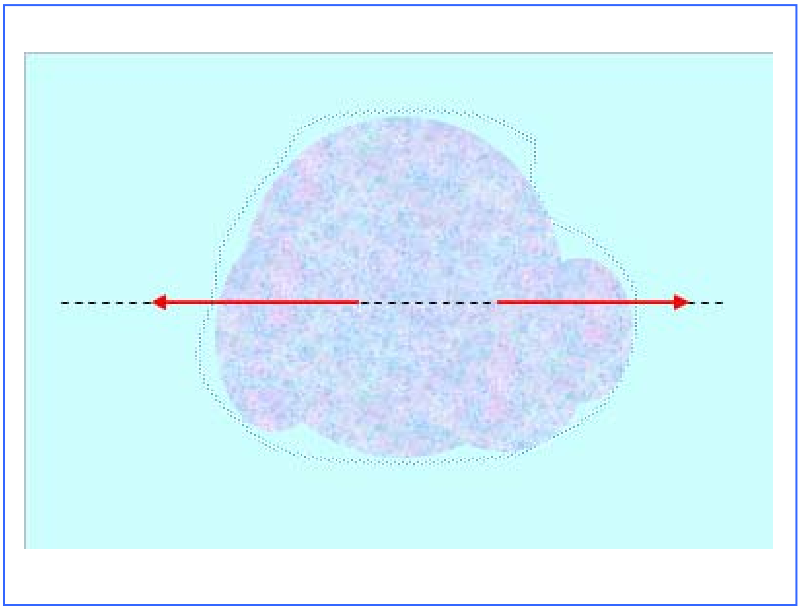


Figura 2.2: Applicando ad un sistema rigido due forze aventi la stessa retta d’azione, la stessa intensità e versi opposti, oppure sopprimendo due forze siffatte, non verranno alterate le condizioni di equilibrio del corpo.

2.2 Equilibrio di un sistema rigido libero

2.2.1 Composizione di forze in un corpo rigido

Forze concorrenti

Due o più forze applicate ad un sistema rigido costituiscono un sistema di **forze concorrenti** se le loro rette d'azione si intersecano tutte in uno stesso punto.
In figura 2.3 è considerato il caso di due forze $\mathbf{F_1}$ e $\mathbf{F_2}$ applicate nei punti P_1 e P_2 e le cui rette d'azione si intersecano nel punto C.

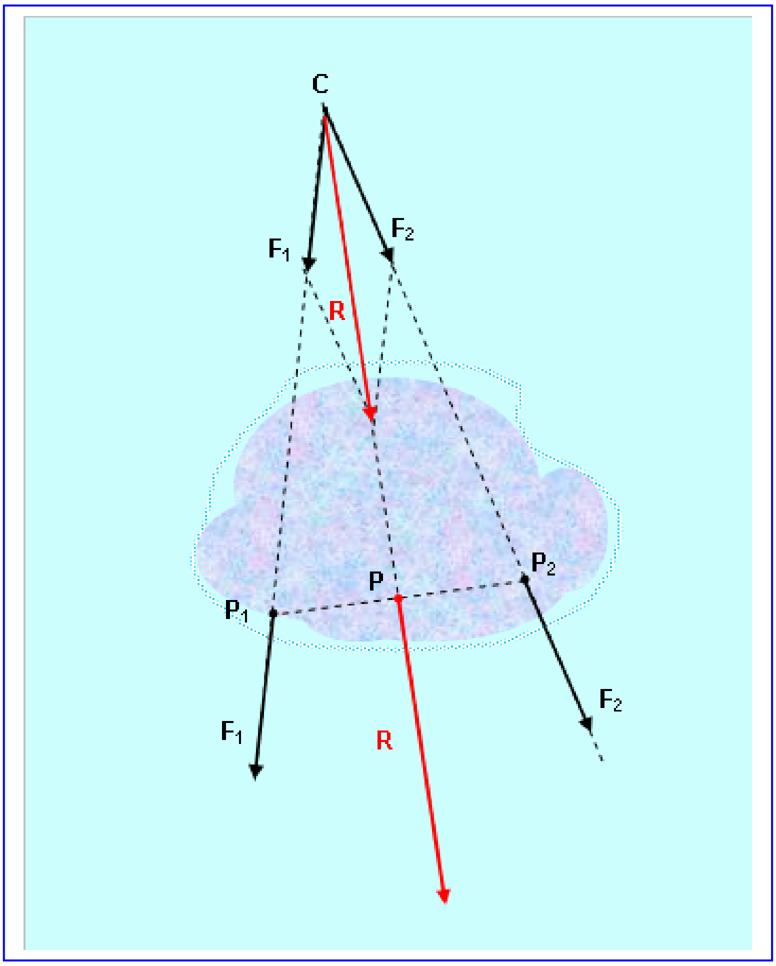


Figura 2.3: Costruzione della risultante di due forze concorrenti $\mathbf{F_1}$ ed $\mathbf{F_2}$ applicate ad un sistema rigido libero.

Per trovare la forza risultante basta trasportare in C i punti di applicazione delle forze due forze in base alla prima proprietà scritta sopra. In tal modo non vengono alterate le condizioni di equilibrio del sistema rigido e al situazione è identica a quella di un punto materiale al quale sono applicate più forze.

Nel caso particolare considerato in figura, il trasporto in C è valido solo per la costruzione della risultante, che va comunque applicata in un punto del corpo sulla sua retta d'azione; non ha ovviamente senso l'applicazione concreta delle forze in C, in quanto tale punto non appartiene al sistema rigido.

La risultante **R** si determina con la regola del parallelogrammo e può essere pensata applicata in uno qualunque dei punti che la sua retta d'azione ha in comune col sistema rigido, per esempio nel punto P di intersezione della sua retta di azione con la congiungente i punti in cui sono applicate le due forze assegnate.

Nel caso di un sistema costituito da più forze concorrenti, dopo aver trasportato tutte le forze nel punto in cui concorrono le loro rette di azione, si procede alla determinazione della risultante nello stesso modo in cui si è operato per le forze applicate nello stesso punto.

Il sistema rigido è ovviamente in equilibrio se la risultante è nulla. In tal caso si dice che *il sistema di forze è un sistema equilibrato, cioè una forza qualsiasi del sistema è l'opposta dell'altra.*

Forze parallele

Si dicono **forze parallele** delle forze *che, essendo applicate a punti diversi di un corpo rigido, hanno rette d'azione parallele*; precisamente le forze parallele possono essere:

- *concordi*, se agiscono nello stesso verso;
- *discordi*, se agiscono in verso opposto.

In questo paragrafo sarà analizzato il metodo utilizzato per la composizione di due forze parallele concordi e di due forze parallele discordi, rispettivamente.

Forze parallele concordi

Per determinare la risultante di due forze parallele concordi sarà utilizzata l'esperienza realizzata con il dispositivo indicato in figura 2.4.

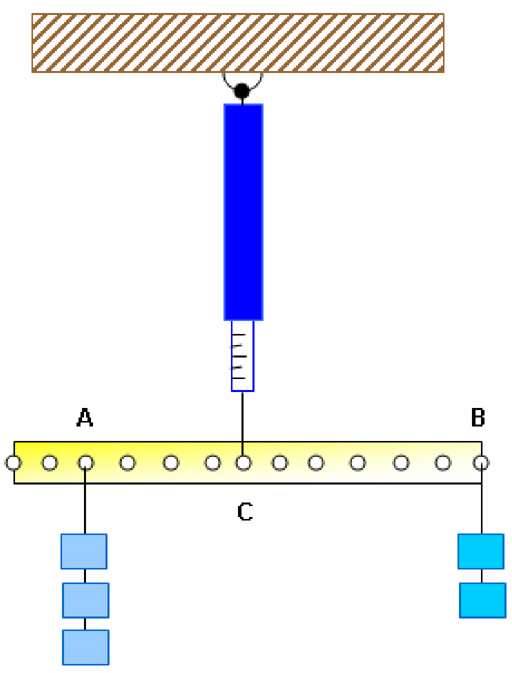


Figura 2.4: Determinazione sperimentale della risultante di due forze parallele concordi.

Un'asta rigida viene preliminarmente equilibrata, agganciandola ad un dinamometro nel suo centro C. Dopo aver azzerato il dinamometro si applicano nei punti A e B dell'asta le forze peso 3P e 2P (P è un peso qualsiasi) agenti entrambe verticalmente verso il basso. Si trova che l'asta rigida rimane in equilibrio e che il dinamometro segna una forza di 5P.

La forza esercitata dal dinamometro verticalmente verso l'alto è l'equilibrante della risultante delle due forze applicate in A e in B.
Di conseguenza si può concludere che:

" *La risultante è una forza verticale diretta verso il basso, cioè parallela e dello stesso verso delle due forze componenti e avente intensità uguale alla somma delle intensità delle forze componenti".*

Inoltre osservando la figura, si nota che tra le intensità 3P e 2P delle forze componenti e le distanze dei loro punti di applicazione A e B dal punto C in cui è applicata la risultante sussiste la proporzione:

$$2P : 3P = AC : CB \qquad \text{eq. 2.1}$$

in quanto AC e CB sono uguali rispettivamente a 4 e 6 intervalli uguali in cui l'asta è divisa.

Le conclusioni a cui si può facilmente giungere analizzando il risultato dell'esperienza descritta valgono in generale, per cui è possibile enunciare la seguente regola:

*La risultante **R** di due forze parallele e concordi $\boldsymbol{F_1}$ **e** $\boldsymbol{F_2}$, applicate ad un corpo rigido, è una forza parallela e concorde alle due forze componenti, avente intensità uguale alla somma delle intensità di $\boldsymbol{F_1}$ **e** $\boldsymbol{F_2}$ ed applicata nel punto che divide il segmento avente per estremi i punti di applicazione di $\boldsymbol{F_1}$ **ed** $\boldsymbol{F_2}$ in parti inversamente proporzionali ad $\boldsymbol{F_1}$ **e** $\boldsymbol{F_2}$.*
Si ha cioè:

$$R = F_1 + F_2$$

$$F_2 : F_1 = AC : CB$$

Se le forze parallele e concordi sono più di due, esse si compongono successivamente con la regola del parallelogrammo, cioè la risultante di due di esse con la terza, questa nuova risultante con la quarta e cosi via.

Il loro effetto è ancora equivalente ad un'unica forza risultante, parallela alle forze date, di intensità pari alla somma delle loro intensità, verso concorde con le forze date ed applicata ad un punto C, come mostrato in figura 2.5.

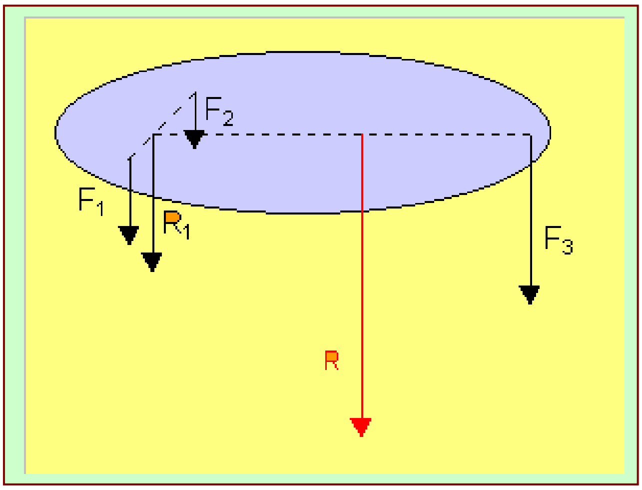


Figura 2.5: Risultante di un insieme di forze parallele.

Il punto C, che è il punto di applicazione della risultante, si chiama **centro delle forze parallele**, nel senso che, se le forze F_1,F_2 …ed in generale F_n ruotano intorno ai loro punti di applicazione, conservando la loro intensità e restando parallele e concordi, C resta immutato; C dipende solo dalla posizione dei punti di applicazione delle forze e dal rapporto delle misure delle forze (a pari unità), non dalla loro direzione. Infatti, se le forze ruotano tutte dello stesso angolo α intorno ai rispettivi punti di applicazione, il centro di queste nuove forze (cioè il punto di applicazione della loro risultante) è sempre il punto C poiché far ruotare di un angolo α la direzione delle forze mantenendo fermo il corpo, equivale a ruotare in verso contrario il corpo mantenendo costante la direzione delle forze; se ne conclude quindi che, nel caso in cui il corpo dovesse subire una qualunque rotazione, la posizione di C resterebbe immutata (figura 2.6).

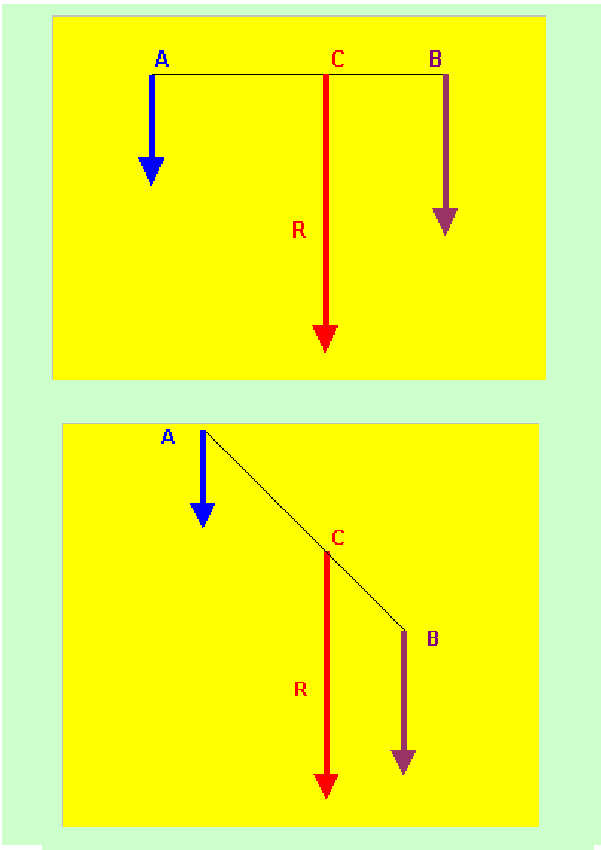


Figura 2.6: Centro delle forze parallele. Nel caso in cui il corpo dovesse ruotare, la posizione di tale punto rimane immutata.

Si conclude dicendo che:

Due o più forze parallele e concordi ammettono sempre una risultante non nulla e, pertanto, non possono mai equilibrarsi.

Regola classica per la ricerca del centro di due forze parallele e concordi

Siano $\mathbf{F_1}$ e $\mathbf{F_2}$ due forze parallele e concordi applicate ai punti A e B di un corpo rigido. Si aggiunga la forza $-\mathbf{f}$ a $\mathbf{F_1}$ e la forza $\mathbf{f}$ a $\mathbf{F_2}$, come mostrato in figura 2.7.

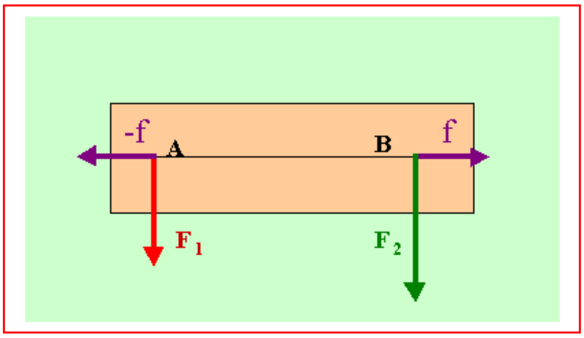


Figura 2.7: Regola classica per la ricerca del centro di due forze parallele e concordi (I passo).

Le risultanti $\mathbf{R_1} = \mathbf{F_1} + (\mathbf{-f})$ e $\mathbf{R_2} = \mathbf{F_2} + (\mathbf{f})$ sono equivalenti alle quattro forze $\mathbf{F_1}$ $\mathbf{F_2}$, **(-f)(+f)** e quindi alle due forze $\mathbf{F_1}$, $\mathbf{F_2}$.

Ma le risultanti $\mathbf{R_1}$ **ed** $\mathbf{R_2}$ sono concorrenti nello stesso punto e componendole con la regola del parallelogrammo danno **R** come risultante. Agli effetti dell'equilibrio **R** è equivalente a $\mathbf{F_1} + \mathbf{F_2}$ ed è parallela e concorde con le forze componenti (figura 2.8).

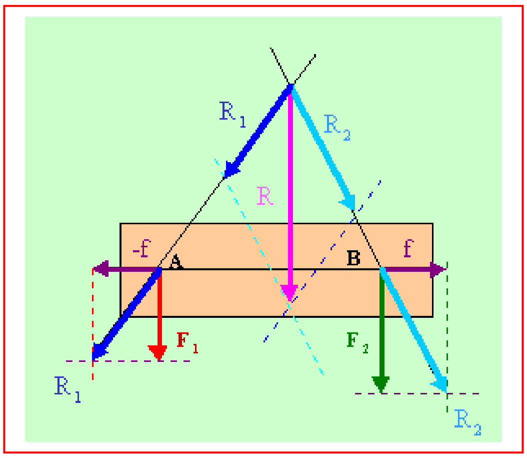


Figura 2.8: Regola classica per la ricerca del centro di due forze parallele e concordi (II passo).

Con riferimento alla figura 2.9 si può provare geometricamente, dalla similitudine dei triangoli verdi e da quella dei triangoli rossi, che il punto di applicazione C della risultante **R** delle forze $\mathbf{F_1}$ ed $\mathbf{F_2}$ divide il segmento AB in due parti AC e CB inversamente proporzionali a $\mathbf{F_1}$ ed $\mathbf{F_2}$:

$$AC/CB=F_1/F_2$$

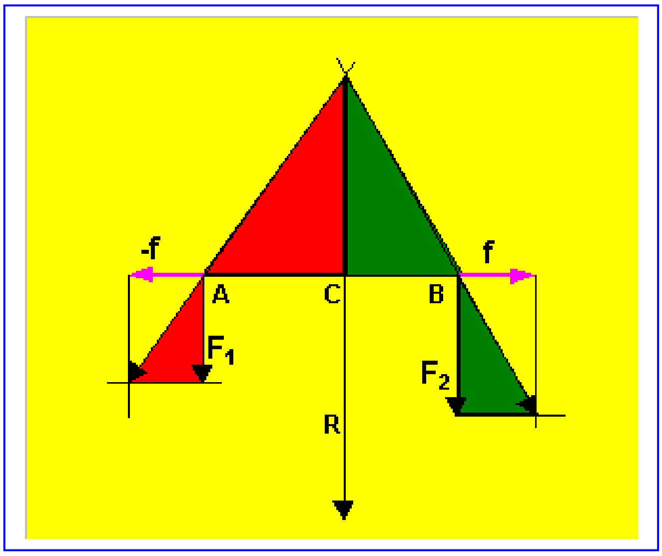


Figura 2.9: Determinazione geometrica della posizione del centro di due forze parallele e concordi.

Regola immediata per la determinazione del centro di applicazione C della risultante R di due forze parallele e concordi

Il punto di applicazione di **R** si determina molto più velocemente, rispetto al procedimento illustrato precedentemente, trasportando ciascuna forza nel punto di applicazione dell'altra e ruotandone una. Il punto di incontro tra la congiungente i punti di applicazione delle forze e la congiungente i cuspidi delle nuove forze è il punto C, ossia *il centro delle forze parallele* (figura 2.10).

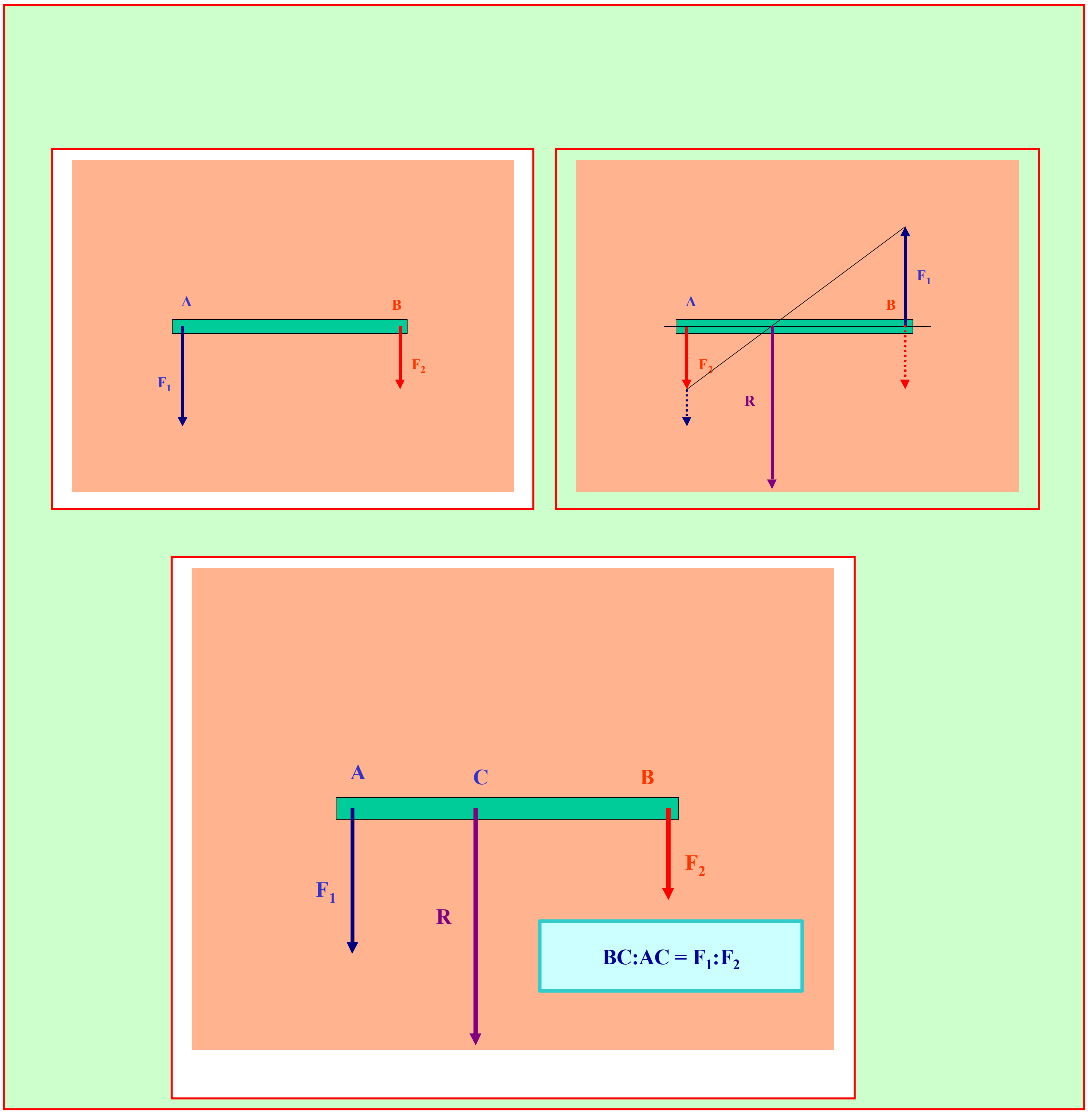


Figura 2.10: Regola immediata per la determinazione del centro di applicazione C della risultante **R** di due forze parallele e concordi.

Applicazione: Nella figura 2.11, è mostrato come si realizza in laboratorio l'esperimento relativo alla somma di due forze parallele e concordi che agiscono agli estremi di un regolo rigido.

Dopo aver applicato al corpo le due forze concordi, occorre applicare ad esso una forza uguale e contraria alla forza risultante, detta equilibrante, perché il corpo sia in equilibrio statico.

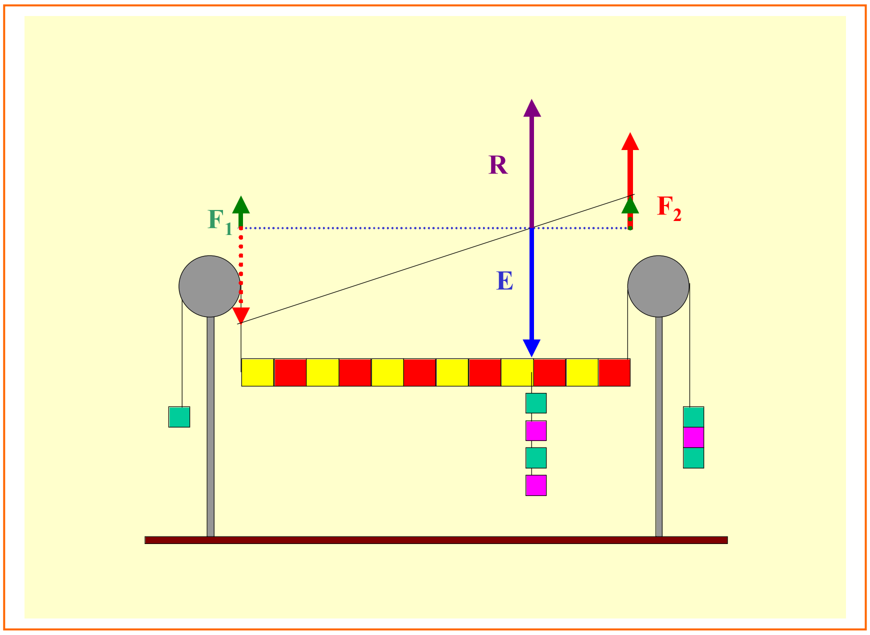


Figura 2.11: Schema della realizzazione in laboratorio dell'esperimento relativo alla somma di due forze parallele e concordi che agiscono agli estremi di un regolo rigido.

Forze parallele e discordi

Anche il sistema di due forze parallele e di verso opposto ammette una risultante. Per verificarlo e per determinare contemporaneamente le proprietà della risultante, ci si riferisce nuovamente all'esperimento realizzato con il dispositivo sperimentale di figura 2.4.

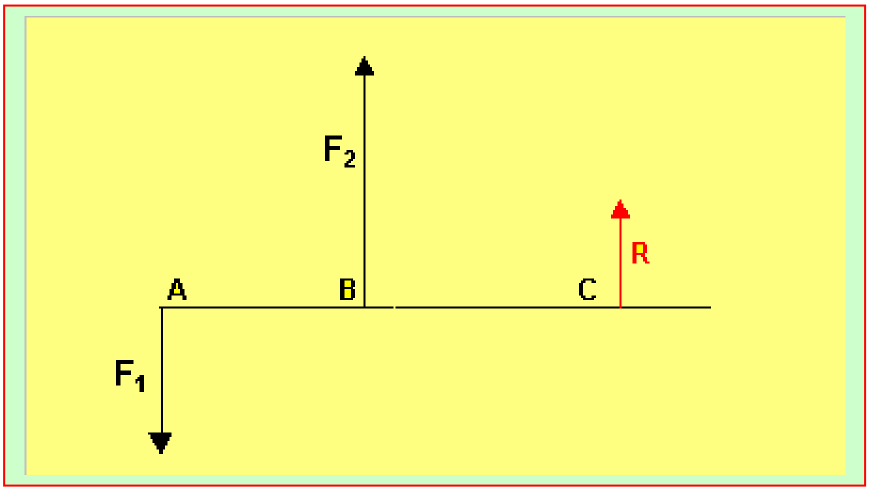


Figura 2.12: Risultante di due forze parallele e di verso opposto.

Premesso che il sistema di forze agenti è un sistema equilibrato che non altera la posizione di equilibrio dell'asta, è possibile considerare una qualunque delle tre forze come l'equilibrante delle altre due, per esempio la forza 2P applicata in B come l'equilibrante delle forze 3P e 5P parallele e di verso opposto e applicate rispettivamente in A ed C.

Pertanto la risultante, opposta di 2P, è verticale e diretta verso l'alto, cioè è parallela alle due forze componenti 3P e 5P, ha il verso della maggiore e intensità uguale alla differenza delle intensità delle componenti.

Dall'equazione 2.1 segue che:

$$(2P + 3P) : 3P = (AC + CB) : CB$$

da cui:

$$5P : 3P = AB : CB$$

cioè le forze componenti 5P e 3P stanno tra loro nel rapporto inverso delle distanze del punto di applicazione della risultante dai punti di applicazione delle due forze componenti.

Anche queste conclusioni valgono in generale, per cui è possibile enunciare la seguente regola:

La risultante ***R*** *di due forze parallele* $\boldsymbol{F_1}$ ***e*** $\boldsymbol{F_2}$ *di verso opposto, applicate ad un corpo rigido, è una forza parallela alle due forze componenti, avente il verso della maggiore, intensità uguale alla differenza delle intensità di* $\boldsymbol{F_1}$ ***e*** $\boldsymbol{F_2}$ *ed applicata esternamente al segmento che ha per estremi i punti di applicazione di* $\boldsymbol{F_1}$ ***ed*** $\boldsymbol{F_2}$ *, nel punto C le cui distanze dai punti in cui sono applicate le due forze componenti sono inversamente proporzionali alle intensità di* $\boldsymbol{F_1}$ ***e*** $\boldsymbol{F_2}$***.***

Si ha cioè:

$$R = F_1 - F_2$$

$$F_2 : F_1 = AC : CB$$

Anche in questo caso è possibile utilizzare il metodo classico per la determinazione della risultante e del suo centro di applicazione.

Il procedimento, identico a quello effettuato nel caso di forze parallele concordi è illustrato in figura 2.13.

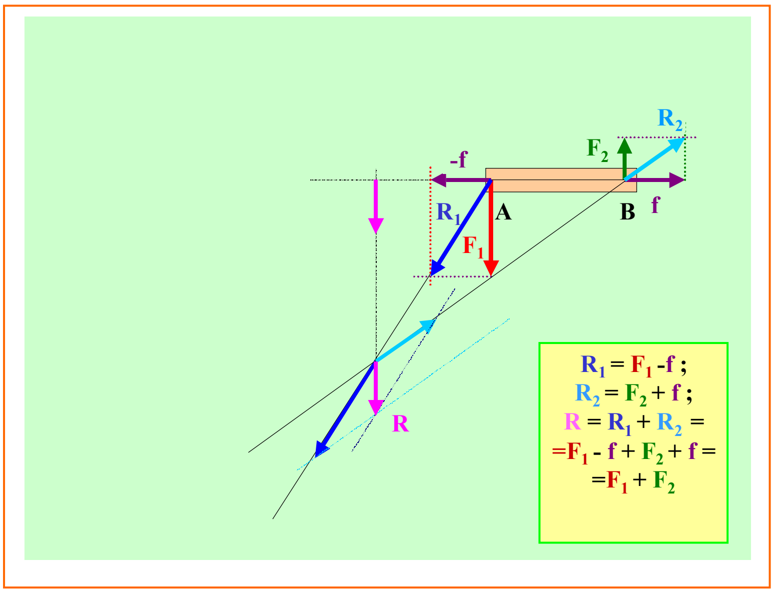


Figura 2.13: Metodo classico per la determinazione di due forze parallele discordi applicate a due punti di un corpo rigido.

A differenza del caso di due forze parallele e concordi, che ammettono sempre una risultante non nulla, ciò non è sempre vero nel caso di due forze parallele e discordi: se le due forze hanno la stessa intensità, esse hanno come risultante una forza di modulo nullo e direzione e verso indeterminati.

Il fatto che manchi una risultante non vuol dire però che queste due forze si facciano equilibrio; anzi è evidente che tali forze, applicate ad un corpo rigido e perfettamente libero di muoversi, hanno l'effetto di provocare una rotazione del corpo attorno ad una qualunque retta perpendicolare al piano che contiene le due forze.

Il sistema costituito da due forze parallele, discordi e di uguale intensità, applicate ad un corpo rigido, prende il nome di **coppia di forze**: e si chiama *piano della coppia* il piano determinato dalle linee di applicazione delle due forze.

Si dice **braccio b** della *coppia di forze* la distanza tra le due rette d'azione delle forze.

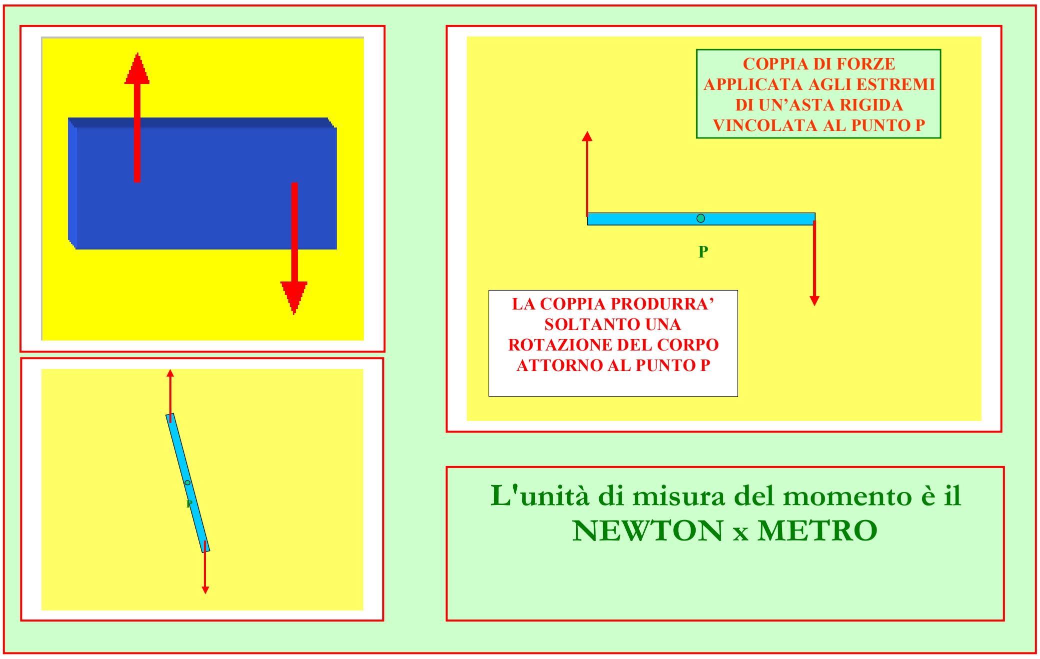


Figura 2.14: Schematizzazione di una coppia di forze ad un corpo rigido.

Nella vita quotidiana esercitiamo spesso delle coppie di forze. Per esempio, facendo girare un volante, un giravite, una chiave dentro una serratura, come mostrato in figura 2.15.

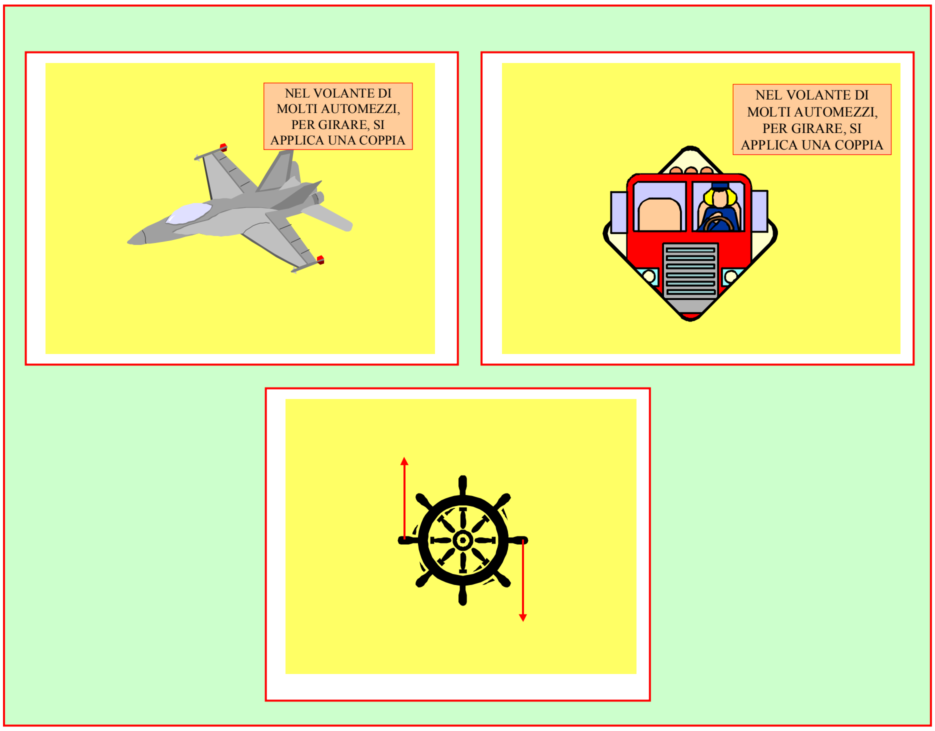


Figura 2.15: Alcune applicazioni nella vita quotidiana di una coppia di forze.

Vi sono due modi per aumentare l'efficacia di una coppia nel provocare la rotazione di un corpo. Si può aumentare l'intensità delle forze, come capita ad esempio quando non si riesce a far girare una chiave nella serratura. Oppure si possono allontanare i punti di applicazione, in modo da aumentare al distanza tra le linee di azione su cui agiscono le forze.

E' per questa ragione che nei cavatappi l'asta su cui si esercita lo sforzo è molto più lunga dello spessore della vite. Più lunga è l'asta, alla cui estremità è applicata la coppia, minore è lo sforzo che si compie.

Il prodotto b·F, dove *b* è il braccio della coppia ed *F* è l'intensità di ciascuna delle forze, fornisce una misura dell'efficacia della coppia nel provocare le rotazioni. Quanto più grande è *b,* oppure *F,* tanto maggiore è l'efficacia della coppia.

Ma una coppia è caratterizzata anche da un asse su cui avviene la rotazione e da un senso di rotazione.

Tutte queste informazioni, che individuano le diverse proprietà di una coppia di forze, sono contenute in una nuova grandezza vettoriale, il **momento della coppia**, che é indicata con la lettera **M.** Essa ha una intensità, una direzione ed un verso.

L'intensità è definita dal prodotto:

$$M = b \cdot F$$

del braccio della coppia per l'intensità della forza; la direzione coincide con quella dell'asse della coppia (cioè di una qualunque retta normale al piano che contiene la coppia); ed il verso è legato ad un verso tale che un ipotetico osservatore, attraversato dal vettore nel senso "pieditesta", vede la coppia produrre una rotazione in senso antiorario.

Il momento di una coppia si misura, nel Sistema Internazionale, in Newton·metro.

In particolare, per determinare il verso del momento della coppia, bisogna prima puntare il pollice della mano destra lungo l'asse di rotazione e poi si prova a chiudere la mano. Le dita, avvicinandosi al palmo della mano, individuano un senso di rotazione. Se esso è uguale al senso di rotazione provocato dalla coppia, il verso di M è proprio quello in cui punta il pollice. In caso contrario il verso è quello opposto, come mostrato in figura 2.16.

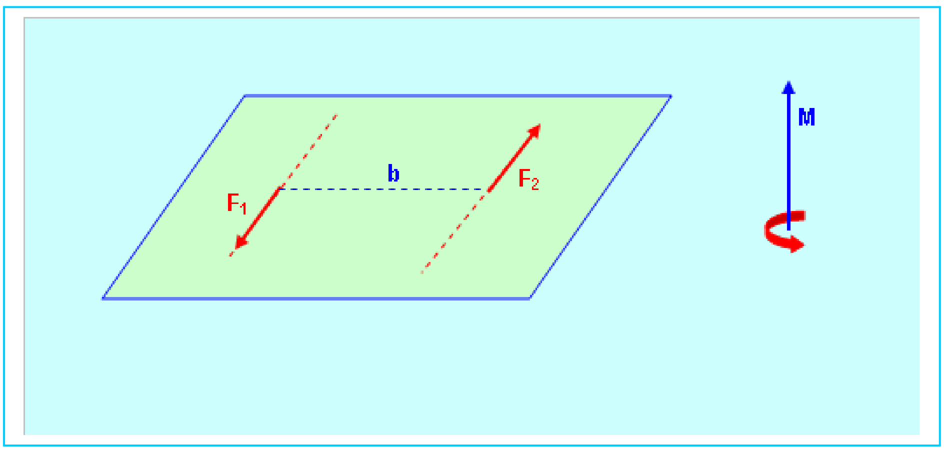


Figura 2.16: Direzione, verso ed intensità del momento di una coppia di forze.

Dando al momento la suddetta rappresentazione vettoriale, *è possibile effettuare sulle coppie delle operazioni di composizione del tutto analoghe a quelle che si effettuano sulle forze:* tali operazioni vengono infatti effettuate sui corrispondenti vettori momento. Quindi se ad un corpo rigido sono applicate diverse coppie, agenti in piani qualsiasi, esse equivalgono ad un'unica coppia che abbia per vettore momento la risultante dei vettori momento delle varie coppie.

Risulta chiaro che due coppie si fanno equilibrio quando, agendo nello stesso piano o in piani paralleli rigidamente collegati tra di loro, hanno momenti uguali in valore numerico e segno contrario; infatti, in tal caso, tenderebbero ciascuna a far ruotare il corpo rigido in senso opposto e quindi le due rotazioni si elidono vicendevolmente.

Forze sghembe

Due o più *forze si dicono sghembe se le loro rette d'azione giacciono su piani diversi*.

Se un sistema di tali forze è applicato ad un corpo rigido, è possibile la loro composizione ed il risultato è sempre costituito dall'insieme di una forza ed una coppia, qualunque sia il numero delle componenti e comunque siano applicate al corpo.

Per semplicità, quanto detto sarà dimostrato considerando due sole forze sghembe $\mathbf{F_1}$ ed $\mathbf{F_2}$ applicate nei punti A e B del corpo rigido C, come mostrato in figura 2.17.

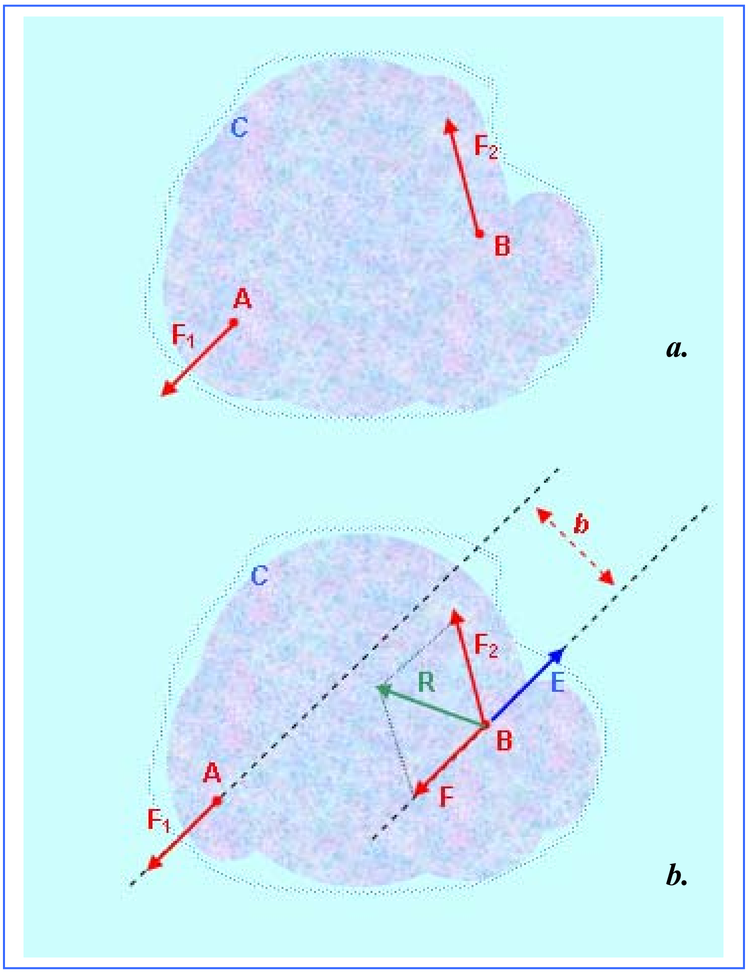


Figura 2.17: Composizione di forze sghembe

Per quanto detto nei paragrafi precedenti, nulla impedisce di pensare applicate in B una forza **F** e al sua equilibrante **E,** aventi direzione parallela a quella di $\mathbf{F_1}$ e modulo uguale ad F_1 (fig. 2.17b); dal punto di vista statico le situazioni *a* e *b* della figura 2.17 sono identiche se il corpo è rigido.

Le forze $\mathbf{F_1}$ ed $\mathbf{F_2}$ **,** composte con la regola del parallelogrammo, danno come risultante una forza **R**, mentre le forze $\mathbf{F_1}$ ed **E** costituiscono una coppia di braccio b il cui momento è:

$$M = F_1 \cdot b$$

Se vi fosse una terza forza $\mathbf{F_3}$, ripetendo il procedimento si otterrebbe un'altra forza applicata in B (compatibile con **R**) ed un'altra oppia, il cui vettore momento potrebbe essere composto con quello della coppia precedente.

In conclusione si otterrebbe sempre una sola forza ed una sola coppia, e ciò anche se le forze fossero quattro, cinque, sei, ecc.

Quindi:

" Sotto l'azione di un qualsiasi numero di forze sghembe, un corpo si sposta in una certa direzione ruotando su se stesso. Sotto l'azione di un numero di forze sghembe qualsiasi, un corpo rigido è in equilibrio se sono nulli separatamente sia la risultante di tutte le forze, che il momento della forza risultante".

2.3 Momento di una forza

Le rotazioni, come già introdotto nel paragrafo precedente, sono caratterizzate da una nuova grandezza fisica, che viene chiamata momento.
In questo paragrafo sarà data la definizione del momento di una forza rispetto ad un punto e del momento di una forza rispetto ad un asse.

2.3.1 Momento di una forza rispetto ad un punto

Si consideri una forza F applicata ad un corpo rigido ed un punto O qualsiasi del corpo.

Si definisce **momento di una forza F rispetto al punto O**, *o momento meccanico, il prodotto vettoriale:*

$$\boldsymbol{M_0} = \boldsymbol{r} \wedge \boldsymbol{F}$$

in cui è ***r = OP****, con P punto di applicazione della forza.*

Il momento meccanico è l'analogo rotazionale della forza. Esso è un vettore la cui direzione è perpendicolare al piano individuato dal vettore posizione di un punto materiale posto in un sistema di riferimento inerziale e dalla forza agente su di esso.

Il verso è dato dalla regola della mano destra del prodotto vettoriale che porta il vettore posizione **r** su **F** nel senso dell'angolo più piccolo da essi formato (figura 2.18).

Il momento di una forza è un vettore libero: in figura è stato rappresentato con la coda della freccia nel punto O, ma può essere rappresentato a partire da qualsiasi altro punto.

Definiamo **braccio** della forza **F** rispetto al punto O il segmento di perpendicolare condotto da O alla retta d'azione di **F**, cioè alla retta passante per il punto P di applicazione di F e avente la stessa direzione della forza.

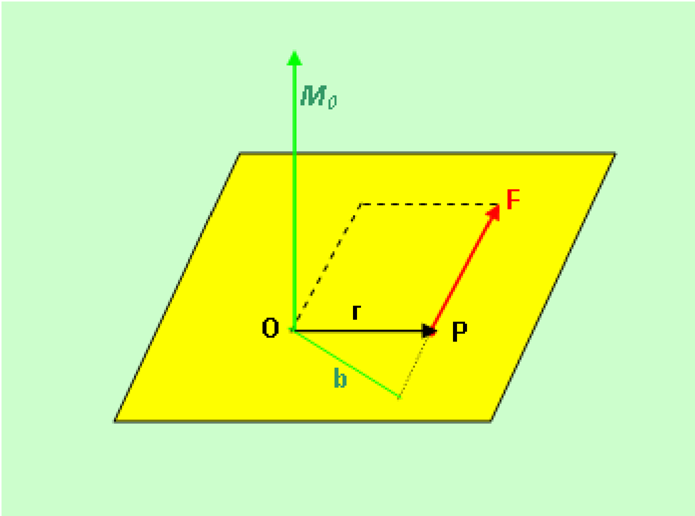


Figura 2.18: Momento di una forza rispetto ad un punto O.

Il modulo M_o del momento, definito come area del parallelogrammo costruito su **F** ed **r**, è:

$$M_0 = b \cdot F$$

cioè il *prodotto dell'intensità della forza per il suo braccio*.

L'unità di misura del momento nel S.I. è il **N*m.**

Sono di immediata verifica le seguenti proprietà:

- il momento di una forza rispetto a un punto O non varia spostando il punto di applicazione della forza lungo la sua retta d'azione;
- il momento di una forza rispetto a un punto della sua retta d'azione è nullo.

La definizione di momento di una forza rispetto ad un punto è estendibile a un sistema di forze qualsiasi. Precisamente, *si definisce* ***momento risultante*** *di un sistema di forze rispetto ad un punto O la somma vettoriale dei momenti delle singole forze rispetto al punto O.*

In particolare *il momento risultante rispetto a un qualsiasi punto O di due forze opposte applicate ad uno stesso punto è nullo, in quanto i momenti delle singole forze sono vettori opposti.*

Esempio:

Un quadro si sospende ad un punto che sta sulla retta d'azione della sua forza peso, cosi che il momento della forza rispetto al punto di sospensione è nullo (figura 2.19); in tal caso infatti $b=0$.

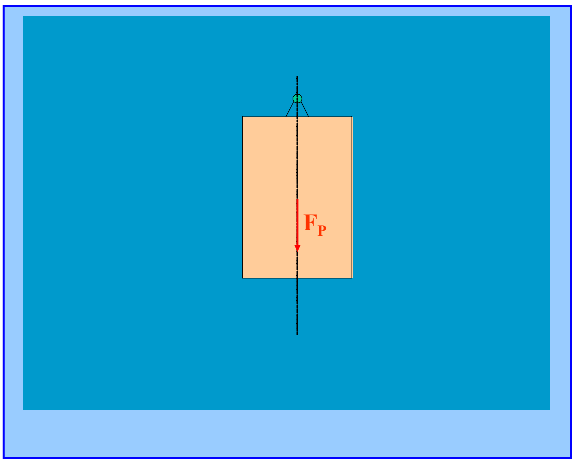


Figura 2.19: Quadro sospeso ad un punto che sta sulla retta d'azione della sua forza peso; il momento della forza rispetto al punto di sospensione è nullo.

Quando un quadro è sospeso ad un punto che non sta sulla retta d'azione della forza peso, si genera un momento della forza peso rispetto al punto di sospensione che produce una rotazione attorno a questo punto e che ha termine quando il punto di sospensione e la forza peso stanno sulla stessa retta, cioè quando il braccio si annulla.

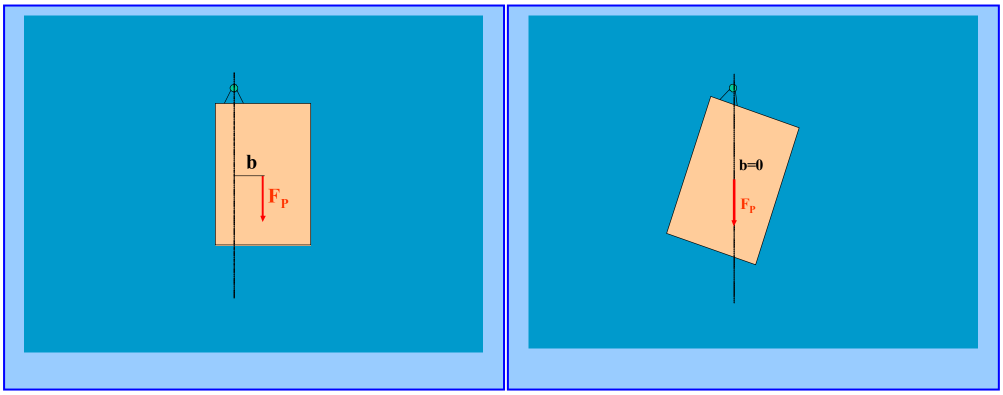


Figura 2.20: Quadro sospeso ad un punto che non appartiene alla retta d'azione della sua forza peso; il momento della forza rispetto al punto di sospensione è diverso da zero.

3. Momento di una forza rispetto ad un asse

Si consideri una forza **F** applicata ad un corpo rigido e disposta arbitrariamente nei confronti dell'asse del corpo (*a*), rispetto a cui si vuole definirne il momento.

Si consideri un piano perpendicolare all'asse *a* del corpo (figura 2.21) e su questo piano si riporti la proiezione della forza **F**, che si indica con **F'**; il punto O è la traccia dell'asse, la misura del segmento OH rappresenta la distanza della forza **F** (e quindi anche della forza **F'**) dall'asse e prende il nome di **braccio** *b* **della forza**.

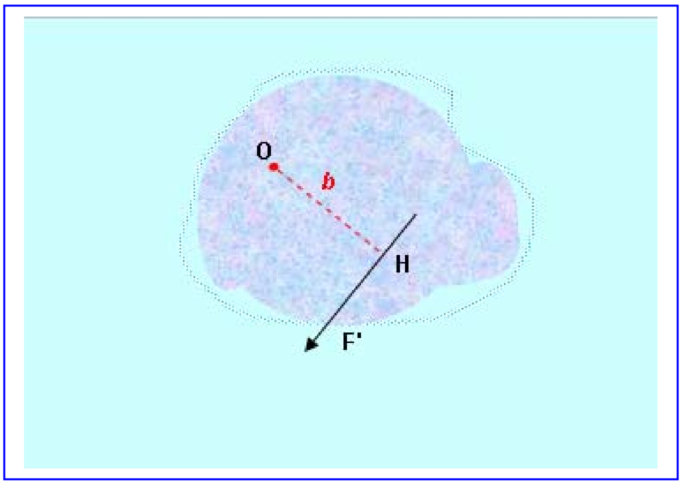


Figura 2.21: Momento di una forza rispetto ad un asse

Si definisce come intensità del **momento della forza rispetto all'asse il prodotto**:

$$M_a = F' \cdot b$$

cioè:

Il momento della sua proiezione su un piano normale all'asse rispetto al punto di intersezione di tale piano con l'asse stesso.

Dalla relazione precedente si vede che il momento della forza rispetto all'asse è nullo:

1) se F'= 0, cioè se la forza ha proiezione di intensità nulla sul piano perpendicolare all'asse; e perché questo sia verificato *la forza **F** deve essere parallela all'asse stesso (figura 2.22);*

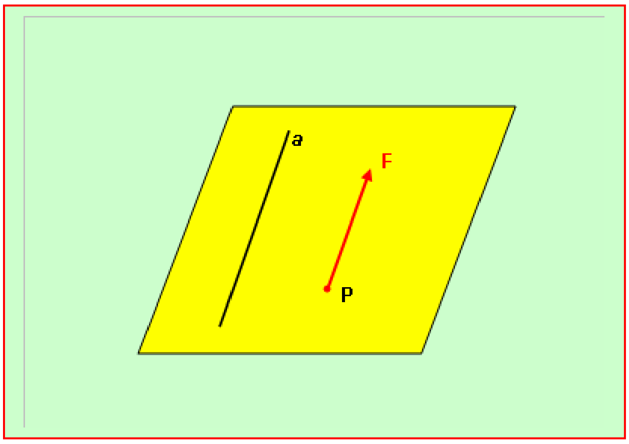


Figura 2.22: Il momento di una forza **F** rispetto ad un asse *a* parallela con *a* è nullo.

2) se b = 0, cioè se la forza ha distanza nulla dall'asse; cioè, in altre parole, se *la forza **F** ha retta d'azione che incontra l'asse (figura 2.23).*

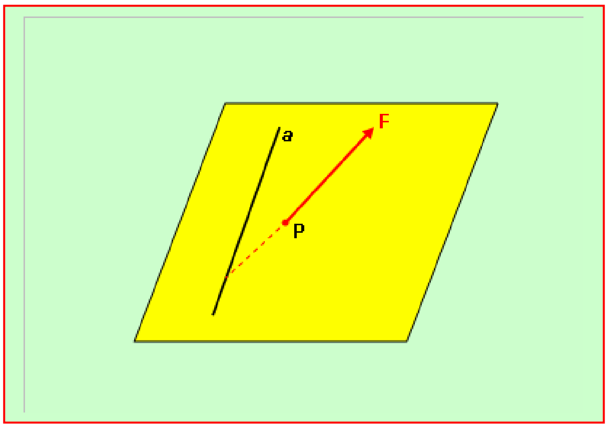


Figura 2.23: Il momento di una forza **F** rispetto ad un asse *a* con retta d'azione che incontra *a* è

Le due suddette condizioni si possono conglobare dicendo che **il momento della forza rispetto all'asse è nullo se la forza e l'asse sono complanari.**

Per spiegare meglio quanto detto si può considerare come corpo rigido una porta e come suo asse quello dei cardini, cioè l'asse attorno a cui la porta è vincolata a ruotare.

Se alla porta si applica una forza **F** qualsiasi, giacente nel suo piano (figura 2.24), è chiaro che essa non è in grado di produrre alcuna rotazione della porta attorno all'asse dei suoi cardini, cioè il suo momento rispetto a tale asse è nullo.

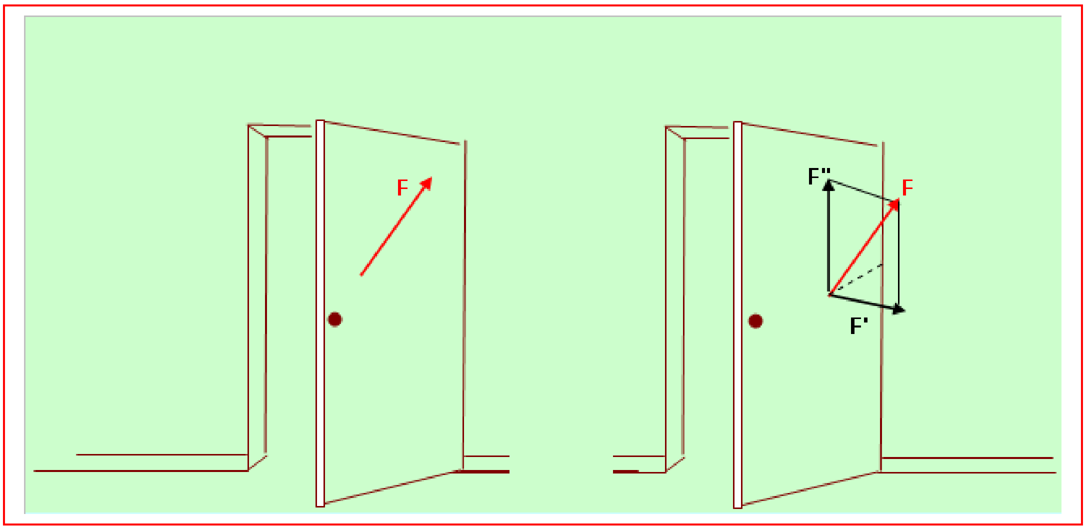


Figura 2.24: Forza **F** applicata ai cardini di una porta. Fig. *a*: la forza giace nel piano della forza, **M**=0; Fig. *b*: la forza produce un momento **M**≠0.

Se invece si applica alla porta una forza **F** qualsiasi, purché non giacente nel suo piano (fig. 2.24b), essa si può scomporre in due forze: una forza **F'**, giacente in un piano perpendicolare all'asse, ed una forza **F''**, parallela all'asse. E' chiaro che la componente **F''**, giacendo nel piano della porta, non è in grado di produrre alcuna rotazione, mentre però lo è la componente **F'** che infatti, giacendo in un piano perpendicolare all'asse della porta e avendo rispetto ad esso un certo braccio, avrà rispetto all'asse un momento espresso dalla relazione $M_a = F' \cdot b$.

E' chiaro inoltre che se al corpo rigido è applicato, anziché una singola forza, un sistema di forze, il momento risultante di tale sistema rispetto ad un asse del corpo è dato dalla somma algebrica dei momenti rispetto all'asse dovuti alle singole forze che compongono il sistema: infatti ciascuna di tali forze o sarà contenuta sul piano dell'asse, e quindi avrà momento nullo,o, diversamente, avrà proiezione su di un piano normale all'asse che tenderà a fare ruotare il corpo attorno all'asse in senso antiorario (momento positivo) o in senso orario (momento negativo).

2.3.3 Condizione di equilibrio di un corpo rigido libero o avente un punto fisso o una asse fisso

Si può dimostrare che *nel caso più generale che su di un corpo rigido agisca un qualunque sistema di forze, tale sistema è riducibile ad una forza ed una coppia*: la forza ha l'effetto di provocare la traslazione del corpo lungo la sua retta d'azione; la coppia ha l'effetto di provocare la rotazione del corpo attorno ad un asse perpendicolare al piano della coppia. Il moto più generale della meccanica è quindi un *moto di rototraslazione*.

Pertanto le **condizioni di equilibrio di un corpo rigido libero** (note anche con il nome di ***equazioni cardinali della statica***) consistono nell'annullarsi della risultante **R** e del momento risultante **M** delle forze che su di esso agiscono, cioè:

$$\mathbf{R} = 0$$

$$\mathbf{M} = 0$$

Se **il corpo rigido ha un punto fisso**, cioè è vincolato a ruotare attorno a quel punto, è in equilibrio qualora le forze del sistema non producano globalmente rotazione attorno a quel punto, cioè sia nullo il loro momento risultante M rispetto a quel punto:

$$\mathbf{M} = 0$$

Nel caso particolare che sul corpo agisca una sola forza, la condizione precedente si traduce nella relazione:

$$F \cdot b = 0$$

dove *F* è l'intensità della forza e *b* il suo braccio: da cui si deduce che il corpo è in equilibrio solo quando la retta d'azione della forza passa per il punto fisso (perché in tal caso è b = 0).

Se **il corpo rigido ha un asse fisso**, cioè *è vincolato a ruotare intorno a quell' asse*, è in equilibrio qualora le forze del sistema non producano rotazione attorno a quell'asse, cioè sia nullo il loro momento risultante M_a rispetto all'asse:

$$\mathbf{M_a} = 0$$

Nel caso particolare che sul corpo agisca una sola forza, la condizione precedente si traduce nella relazione:

$$F' \cdot b = 0$$

dove F' è l'intensità della proiezione della forza su di un piano perpendicolare all'asse e b il suo braccio: da cui si deduce – per quanto detto precedentemente- che il corpo è in equilibrio solo se la forza e l'asse sono complanari.

Schema di risoluzione di un problema di Statica

A questo punto può essere utile riassumere le regole generali che bisogna rispettare, quando si ci si trova ad affrontare un problema di equilibrio.
Per quanto detto fino a questo punto, dato un corpo, conviene:

1. Individuare, ed eventualmente determinare, tutte le forze che agiscono sul corpo;
2. Tracciare un diagramma di tutte le forze che agiscono sul corpo, rispettando l'orientazione rispetto ad un opportuno sistema di riferimento scelto;
3. Scrivere le equazioni di equilibrio per tali forze e per gli eventuali momenti corrispondenti rispetto ad un asse prescelto;
4. Confrontare il numero di incognite con il numero delle equazioni di equilibrio indipendenti disponibili. Nel caso in cui questi due numeri sono uguali, è possibile procedere.

E' importante ricordare che, per un corpo che si trova sollecitato a più forze, si possono presentare le seguenti situazioni:

1. Caso in cui il *corpo sia libero e soggetto all'azione di più forze che possono ridursi alla sola risultante R.*

Se $\mathbf{R} = 0$: il corpo è in equilibrio alla traslazione;
Se $\mathbf{R} \neq 0$: il corpo si muove nella direzione di $\mathbf{R}$

2. Caso in cui il *corpo sia soggetto all'azione di due forze parallele di uguale intensità, ma di verso opposto* (coppia di forze).

Il corpo si trova soggetto ad una coppia di momento di intensità $M = F \cdot b$, per la quale risulta $\mathbf{R} = 0$. Il corpo è assoggettato ad un moto di rotazione.

3. Caso in cui il *corpo sia soggetto all'azione di due forze parallele di uguale intensità, ma di verso opposto, agenti sulla stessa retta d'azione*.

   In tal caso risulta **R** = 0 ed **M** = 0, il corpo è in equilibrio alla rotazione e traslazione.

2.4 Baricentro di un corpo

Ogni corpo esteso è costituito da un numero grandissimo di particelle elementari, atomi o molecole, ognuna delle quali ha un peso, cioè subisce la sollecitazione di una forza diretta verso il centro della Terra. Data l'enorme distanza del corpo dal centro della Terra rispetto alle dimensioni del corpo stesso, i pesi delle singole particelle elementari si possono pensare considerare delle forze uguali, parallele e concordi.

Per quanto visto nel paragrafo 2.2.1, il peso del corpo, che è evidentemente la risultante di questo sistema di forze, sarà applicato, indipendentemente dalla posizione del corpo, sempre a un punto G, centro di forze parallele, a cui viene dato il nome di **centro di gravità** o **baricentro** del corpo.

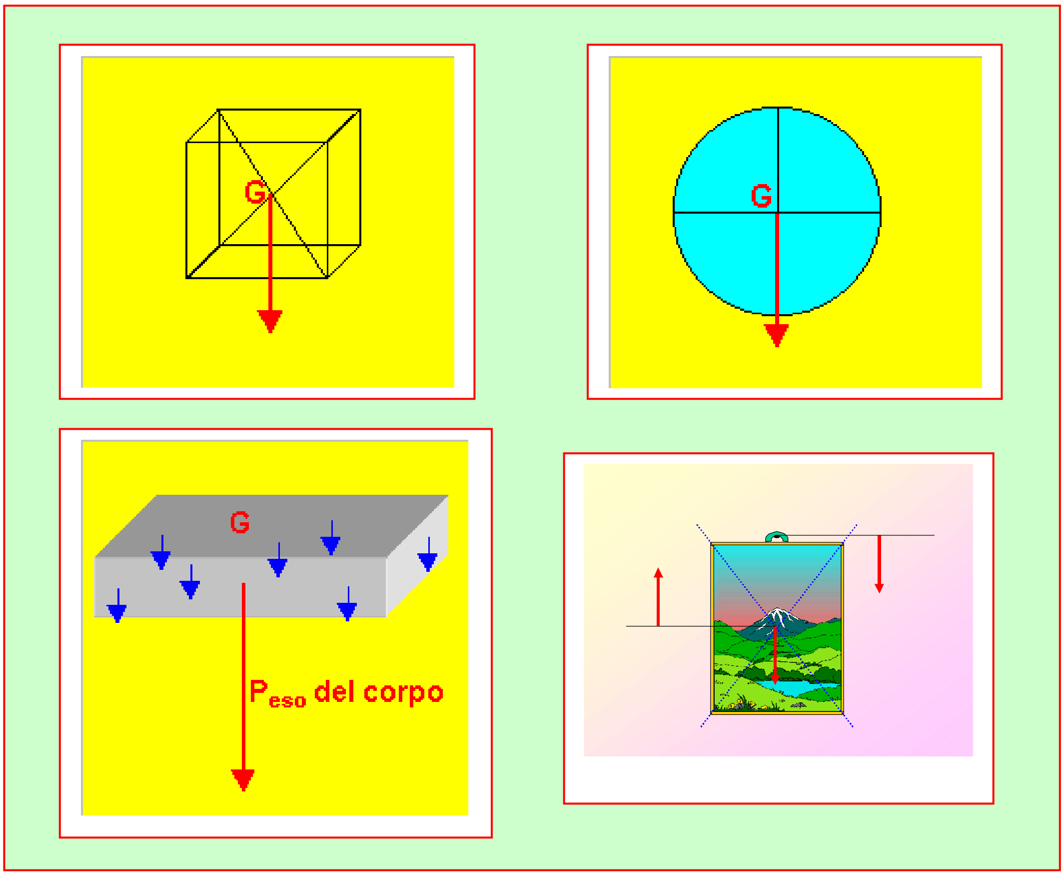


Figura 2.25: Baricentro di un corpo.

In tutti i corpi aventi un centro di simmetria, il baricentro del corpo coincide con il centro di simmetria.

Cosi il baricentro di una sfera omogenea è il suo centro, quello di un cubo è l'intersezione delle diagonali. Analogamente il baricentro di un corpo laminare a forma di cerchio, o di rettangolo, o di rombo, oppure di un triangolo equilatero è rispettivamente il centro del cerchio, l'intersezione delle diagonali e l'intersezione delle mediane (punto che divide ciascuna mediana in due parti, di cui quella contenente un vertice del triangolo, è doppia dell'altra).

Se un corpo è *omogeneo e di forma qualunque, ma scomponibile in figure geometriche delle quali è facile trovare il baricentro*, si può trovare il baricentro complessivo del corpo supponendo di applicare ai vari baricentri parziali delle forze parallele e proporzionate ai volumi a cui appartengono (o, se si tratta di superfici piane o di linee, proporzionate alle rispettive aree o lunghezze) e poi ricavare il loro centro delle forze parallele.

Più in generale questo metodo può essere applicato anche per determinare il baricentro dei *corpi non omogenei, ma scomponibili in corpi omogenei di cui è facile trovare il baricentro*: in tal caso però ai vari baricentri parziali si devono applicare forze uguali proprio ai pesi delle varie parti omogenee in cui si è scomposto il corpo.

2.5 Equilibrio di corpi pesanti vincolati

Finora è stata ritenuta ininfluente la natura delle forze agenti su un corpo, che quindi si sono potute applicare ad un punto qualsiasi. Se però si precisa che la forza da equilibrare è il peso del corpo, allora se ne fissa implicitamente anche il punto di applicazione, che è il baricentro.

Il problema che si vuole risolvere è questo:determinare le condizioni che devono essere verificate affinché un corpo rigido vincolato, soggetto alla sola forza di gravità, sia in equilibrio statico.

I principali tipi di equilibrio di un corpo pesante vincolato sono quelli con vincolo dovuto ad:

- un punto fisso;
- un asse fisso;
- una superficie

e si ottengono tutti con la verifica della condizione fondamentale dell'equilibrio e cioè che la risultante delle forze applicate sia nulla (**R**=0) (impedimento di movimento di traslazione) e nullo sia pure il momento delle forze applicate (**M**=0) (impedimento del movimento di rotazione).

Come anticipato ci occuperemo del caso in cui il sistema sia soggetto soltanto al proprio peso.

2.5.1 Equilibrio di un sistema rigido pesante con un punto fisso o un asse fisso.

In figura è rappresentato un corpo a forma di lamina vincolato ad un punto O (o in modo equivalente si potrebbe pensare il corpo girevole intorno ad un asse perpendicolare al piano del foglio).

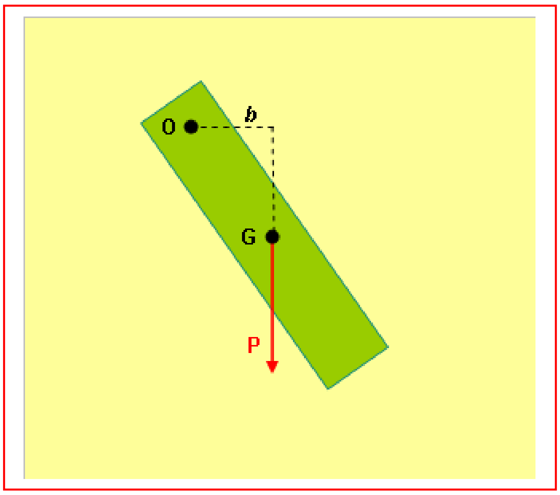


Figura 2.26: Corpo girevole intorno ad un punto O (o in modo equivalente, ad un asse di traccia O) per effetto del momento della forza peso.

Data la natura del vincolo, i soli movimenti possibili del corpo sono delle rotazioni intorno al punto di sospensione fisso O. Infatti la forza agente sulla lamina è il suo peso P applicato nel baricentro G, il cui braccio è la distanza tra la retta di azione (verticale) del peso ed il punto O .
Pertanto, sotto l'azione del momento di modulo:

$$M = P \cdot b$$

la lamina ruota in senso orario.

E' evidente che tale momento è nullo, e quindi *il corpo sospeso si trova in equilibrio, solo se è b = 0, cioè il baricentro del corpo si trova sulla verticale passante per il punto di sospensione O.*

Una volta che sia verificata questa condizione, si posso però distinguere tre diversi tipi di equilibrio:

- *il baricentro è sotto il punto di sospensione* (fig. 2.27a), allora un leggero spostamento del corpo genera una rotazione che tende a riportare il corpo nella posizione iniziale: si ha *equilibrio stabile*;
- *il baricentro è sopra il punto di sospensione* (fig. 2.27b), allora un leggero spostamento del corpo genera una rotazione che tende ad allontanare sempre più il corpo dalla posizione iniziale: si ha *equilibrio instabile*;
- *il baricentro coincide con il punto di sospensione* (fig. 2.27c), allora, comunque si sposti il corpo, questo rimane sempre in equilibrio: si dice che si ha *equilibrio indifferente*;

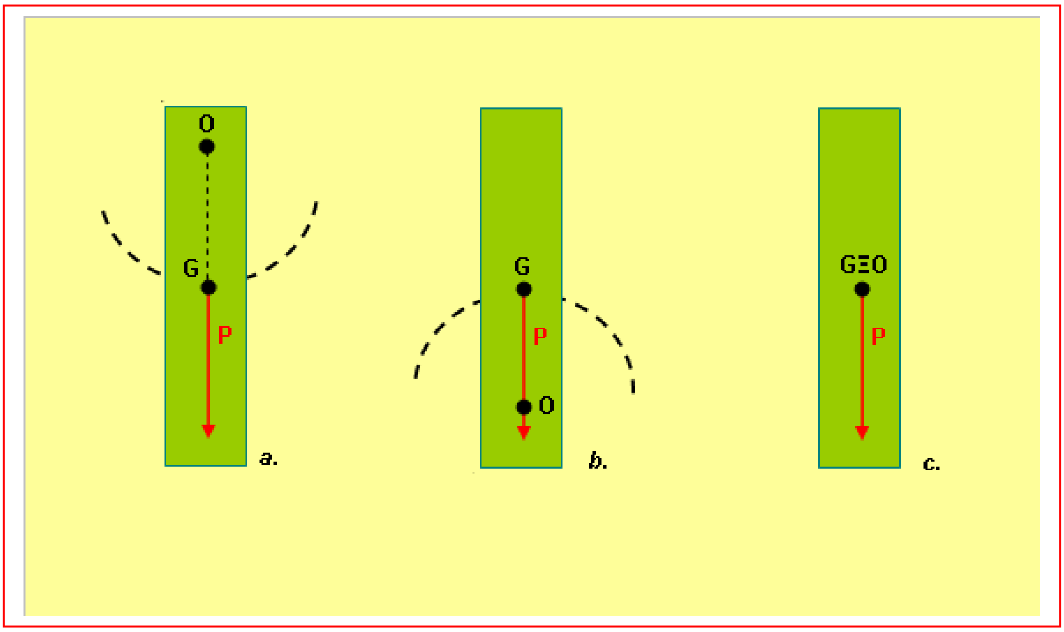


Figura 2.27: Equilibrio stabile (a), instabile (b) ed indifferente (c).

In tutte e tre le posizioni descritte sono soddisfatte le equazioni:

$$\mathbf{R} = 0 \text{ e } \mathbf{M} = 0$$

Infatti in una posizione diversa (vedere esempio), il momento della forza peso **P** rispetto al centro di rotazione O non è nullo, essendo M = P·b, ma lo diventa quando le verticali passanti rispettivamente per G ed O diventano coincidenti e quindi b si annulla, cosa che si verifica in tutti e tre i casi della figura precedente, nei quali è anche **R** = 0, dato che il peso **P** è equilibrato dalla reazione vincolare $\mathbf{R_v}$.

In conclusione:

"Un corpo girevole intorno ad un punto fisso e soggetto alla sola forza di gravità è in equilibrio quando baricentro e centro di rotazione appartengono alla stessa verticale".

Esempio: Corpo sospeso ad un punto P che sta al di sotto del baricentro

In tal caso il corpo si trova sospeso in condizioni di equilibrio instabile, in quanto il suo baricentro G si trova più in alto del punto di sospensione P. Basta un piccolo spostamento del corpo da questa posizione per far ruotare il corpo di 180° e metterlo in condizioni di stabilità, con il punto G al di sotto di P (figura 2.28).

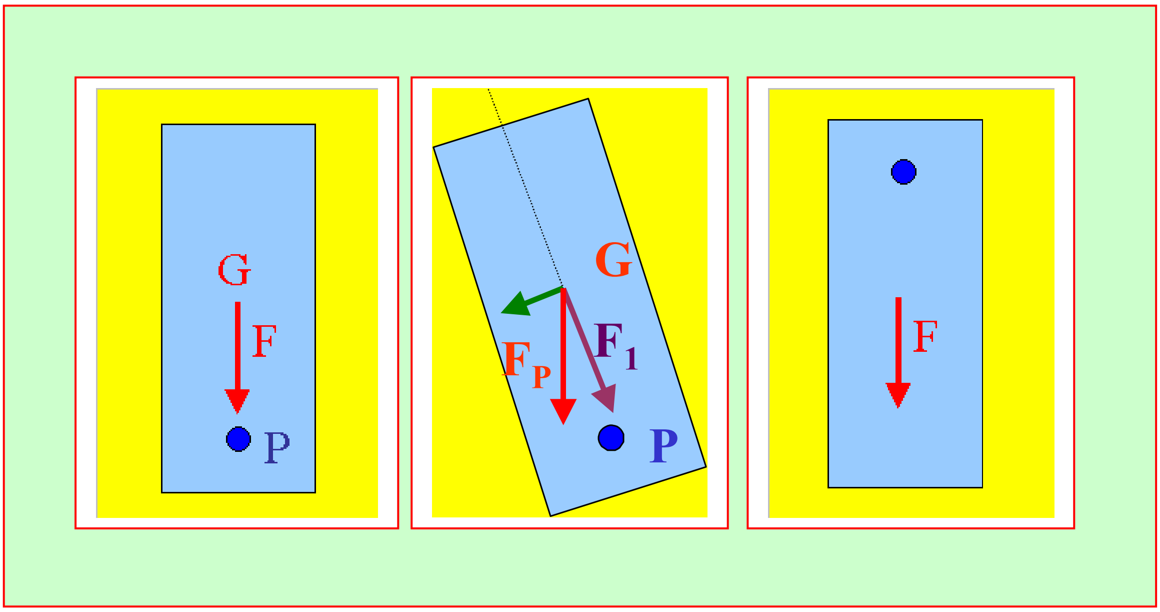


Figura 2.28: Corpo sospeso ad un punto P che sta al di sotto del baricentro.

Il peso può essere considerato come la risultante di due forze: la forza $\mathbf{F_1}$ nella direzione GP, equilibrata dalla reazione del vincolo, e la forza di colore verde, ad essa perpendicolare, che tende a spostare definitivamente il corpo dalla sua posizione iniziale.

Tutto quanto è stato detto vale anche se il **corpo è girevole intorno ad un asse**, con la sola differenza che *si ha equilibrio quando la verticale passante per il baricentro passa anche per un punto dell'asse (*in tal caso il punto O dell'esempio precedente, rappresenta la traccia di un asse perpendicolare al piano del foglio).

La condizione di equilibrio dei corpi sospesi può venire applicata per la ***determinazione pratica del baricentro di un corpo laminare***.

Per ottenere ciò basta sospendere il corpo per un suo punto qualsiasi A (figura 2.29) e tracciare (eventualmente servendosi di un filo a piombo) la verticale passante per quel punto. Si sospende poi il corpo per un altro punto B, e si traccia la nuova verticale passante per esso.

Tenendo conto del fatto che in equilibrio il corpo si dispone in maniera tale che il suo baricentro si trovi sulla verticale passante per il punto di sospensione, cioè anche sul prolungamento del filo, risulta chiaro che il baricentro si troverà nel punto di intersezione delle due rette tracciate. Si può inoltre verificare che ogni altra verticale mandata per altri punti di sospensione passa per il baricentro trovato.

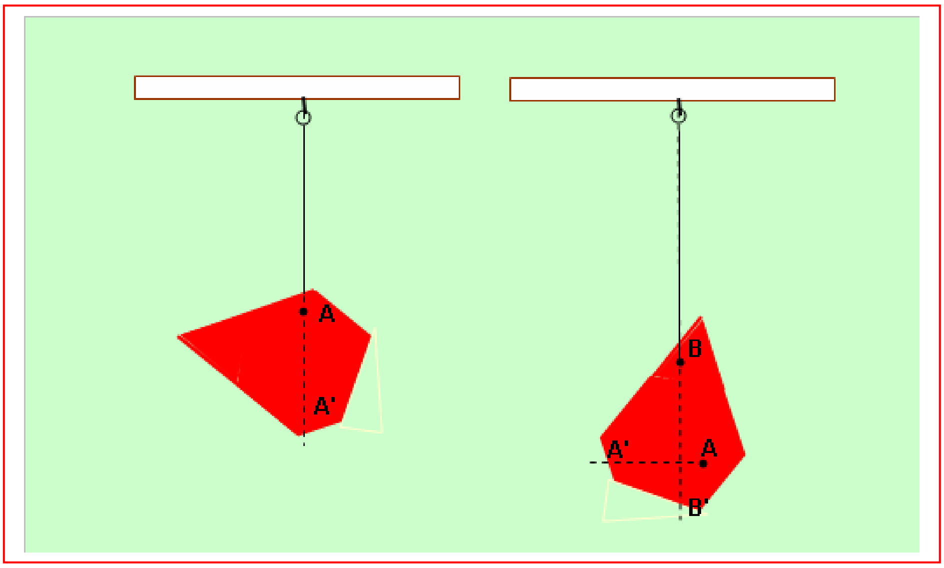


Figura 2.29: Determinazione del baricentro di un corpo per intersezione delle verticali AG, BG passanti per i successivi centri di sospensione A, B.

2.5.2 Equilibrio di un sistema rigido pesante appoggiato

Un corpo pesante appoggiato sopra un piano orizzontale è soggetto al proprio peso e alla reazione vincolare del piano di appoggio che si manifesta come forza verticale diretta verso l'alto. In altri termini il corpo può considerarsi come se fosse libero e soggetto a due forze, il proprio peso e la reazione vincolare. Pertanto si ha equilibrio se le due forze sono opposte ed hanno la stessa retta d'azione.

Se il corpo è appoggiato per un solo punto l'esperienza conferma che si ha equilibrio se la verticale condotta dal baricentro passa per il punto di appoggio. In figura 2.30 sono rappresentati tre casi di equilibrio di corpi appoggiati per un punto sopra un piano orizzontale: una semisfera, un cono e una sfera.

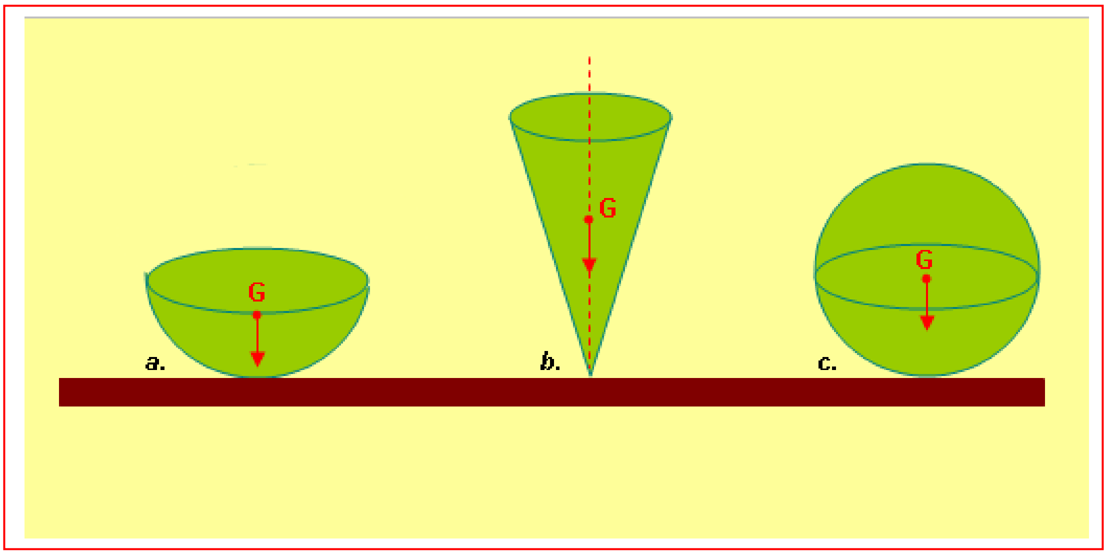


Figura 2.30: Corpi pesanti appoggiati per un punto in posizione di equilibrio stabile (semisfera), instabile (cono) e indifferente (sfera).

Uno spostamento dalla posizione di equilibrio produce nel primo caso un innalzamento del baricentro, nel secondo un abbassamento, mentre nel terzo lascia immutata la quota del baricentro. In base alle considerazioni fatte, l'equilibrio risulta nei tre casi, rispettivamente, stabile, instabile ed indifferente.

Esempio 1: *Equilibrio Stabile, instabile ed indifferente per una sfera appoggiata*

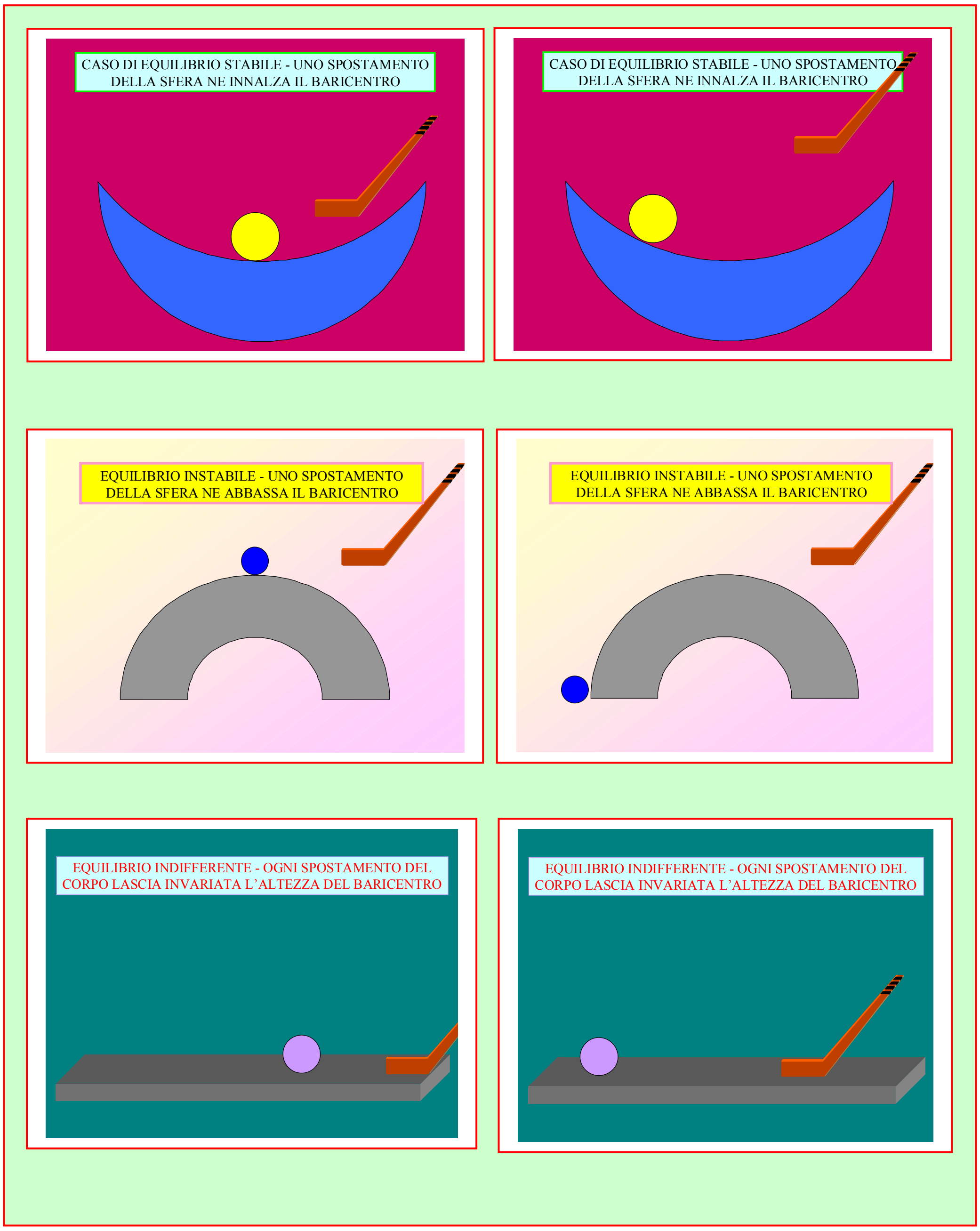


Figura 2.31: Equilibrio Stabile, instabile ed indifferente per una sfera appoggiata

Nel caso in cui il corpo sia appoggiato per più punti l'equilibrio si ha ancora se peso e reazione vincolare hanno la stessa retta d'azione, il che accade *se la verticale condotta dal baricentro è interna alla base di appoggio*, come dimostra l'esperienza realizzata con il sistema a forma di ***parallelepipedo articolato*** rappresentato in figura 2.32.

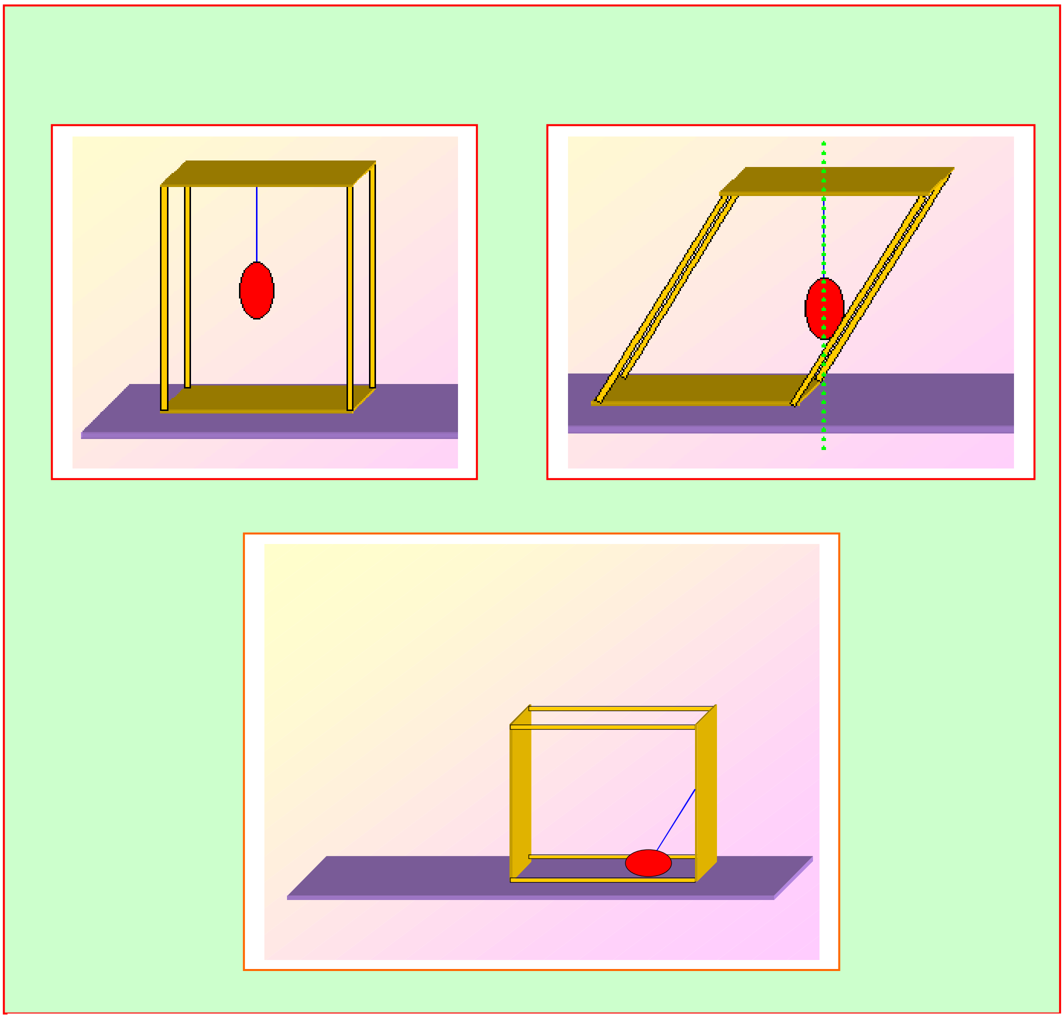


Figura 2.32: Il parallelepipedo articolato è in equilibrio finché la verticale condotta dal baricentro incontra internamente la base di appoggio.

NOTA: Per *base di appoggio, o poligono di appoggio*, si intende la figura che si ottiene unendo tutti i punti periferici sui quali il corpo si appoggia. Per esempio: la base di appoggio di una sedia è la figura che si ottiene unendo le estremità delle gambe.

L'esperienza insegna che un corpo appoggiato su una base è in equilibrio se la verticale passante per il suo baricentro cade dentro la base. In tal caso infatti la risultante delle forze equilibranti $\mathbf{R_v}$ è applicata nel punto in cui la verticale suddetta incontra la superficie d'appoggio. Se invece così non è, il momento della forza **P** rispetto ad un punto A fa ruotare il corpo e ne provoca la caduta.

E' chiaro che più estesa è la base d'appoggio e minore è la possibilità che piccole oscillazioni del corpo possano compromettere l'equilibrio. Questo fa capire, per esempio, perché la posizione eretta di una persona è più stabile se essa tiene le gambe divaricate, mentre lo è meno se le tiene unite: nel primo caso è maggiore l'estensione della base d'appoggio.

Consideriamo qualche esempio.

Esempio 1: La Torre di Pisa

A Pisa vi è una torre pendente, iniziata nel 1174 da Bonanno Pisano e terminata dopo 99 anni da Giovanni di Simone. L'imponente monumento è alto 55,863 metri, è composto da 8 piani ed ha attualmente una pendenza di 4,5 metri (figura 2.33).

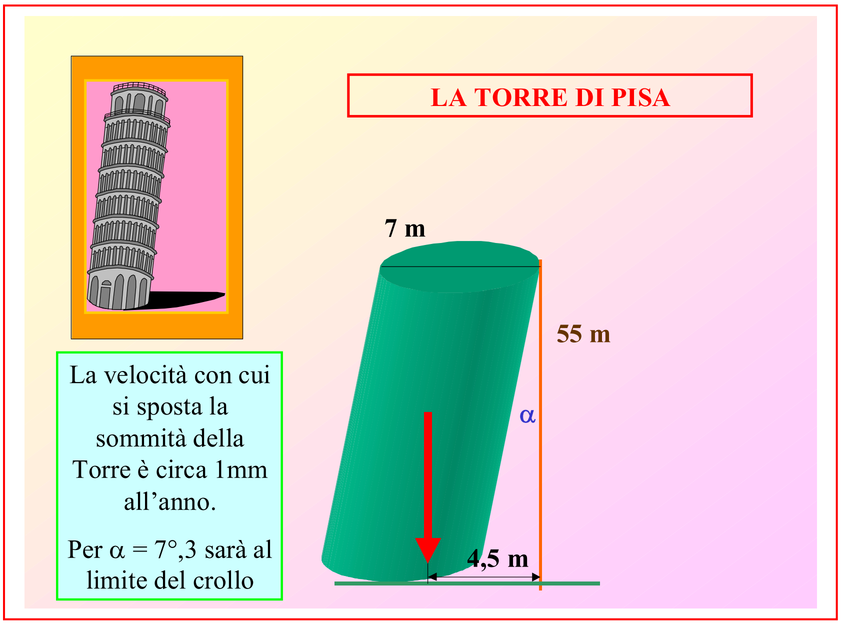


Figura 2.33: La torre di Pisa.

Se non si prenderanno gli opportuni provvedimenti, la Torre di Pisa crollerà nell'anno 4.500, cioè tra quasi 2.500 anni.

Esempio 2: Giocattolo non ribaltabile: tappo di sughero zavorrato con corpo di piombo

Quando si costringe il corpo zavorrato ad adagiarsi sul tavolo, viene innalzato il suo centro di gravità e lo si pone in condizione di equilibrio instabile (figura 2.34).

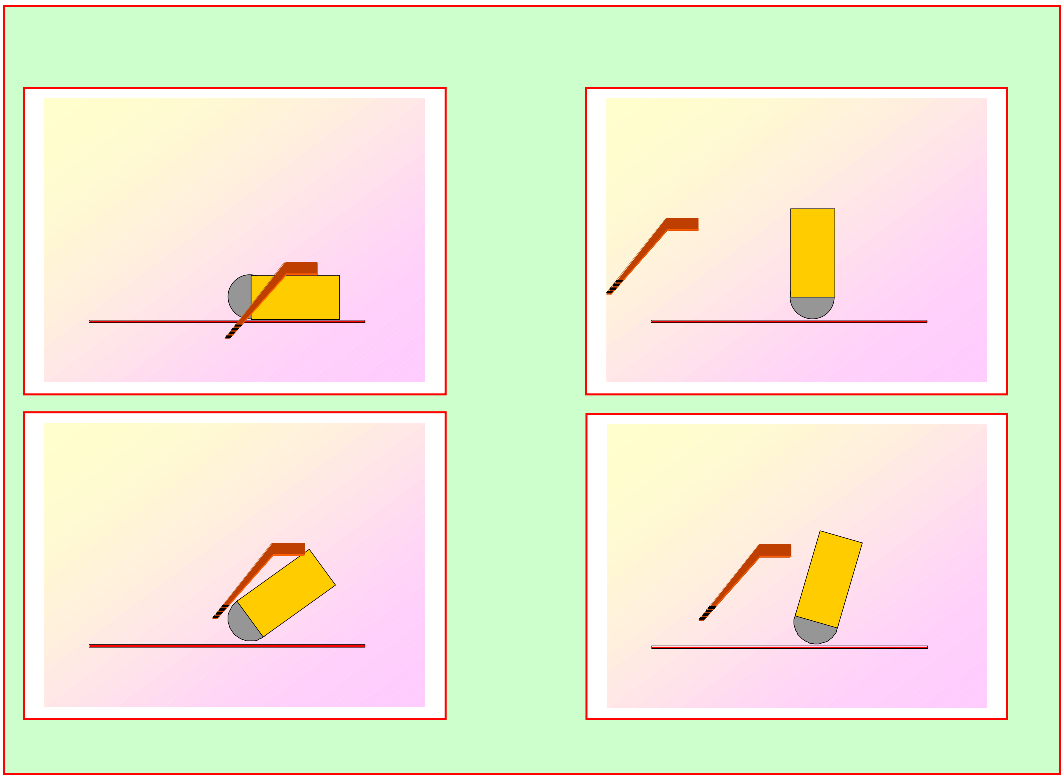


Figura 2.34: Giocattolo non ribaltabile: tappo di sughero zavorrato con corpo di piombo

Una volta lasciato libero, esso tende ad assumere la posizione di equilibrio stabile, portando il suo baricentro nella posizione più bassa possibile rispetto al tavolo, per cui si rialza riprendendo cosi la sua posizione iniziale di equilibrio.

2.6 Cenni di statica applicata

E' stato già introdotto nel corso della trattazione il concetto di vincolo e di reazione vincolare. E' stato detto che un *corpo è libero* quando il suo movimento non è ostacolato da nessuna limitazione; si dice invece *vincolato* quando il movimento è condizionato da certe limitazioni chiamate vincoli.

Un libro appoggiato su un tavolo si potrà muovere soltanto nella zona di spazio ad esso sovrastante, non potendo penetrare al di sotto del tavolo.

Una ruota libera di girare soltanto attorno ad un asse, può solo girare attorno ad esso.

Se ad un corpo rigido si tende ad imprimere un movimento con l'applicazione di una forza, si ha la cosiddetta reazione del vincolo che fa rimanere il corpo in equilibrio, cioè privo di movimento, attraverso l'originarsi di una forza uguale e contraria a quella applicata (questo fatto deriva direttamente dal principio di azione e reazione. Secondo questo principio, infatti, un vincolo crea delle reazioni, cioè delle forze opposte al peso o comunque delle forze agenti, che mantengono il corpo in equilibrio).

Gradi di libertà

E' importante stabilire sempre preliminarmente quali movimenti siano consentiti al corpo dai vincoli al quale esso è soggetto.

Se il problema è limitato al piano, per esempio a quello della pagina di un libro, è chiaro che, in assenza di vincoli, un corpo C può subire delle traslazioni, misurabili in base agli spostamenti nelle direzioni x e y, oppure può rotare in senso orario o antiorario (figura 2.35).

Si dice pertanto che un corpo, non soggetto a vincoli che ne limitino i movimenti sul piano, gode di tre gradi di libertà:

a) può muoversi nella direzione x (traslazione orizzontale);

b) può muoversi nella direzione y (traslazione verticale);

c) può ruotare su se stesso(rotazione intorno ad un punto del suo piano).

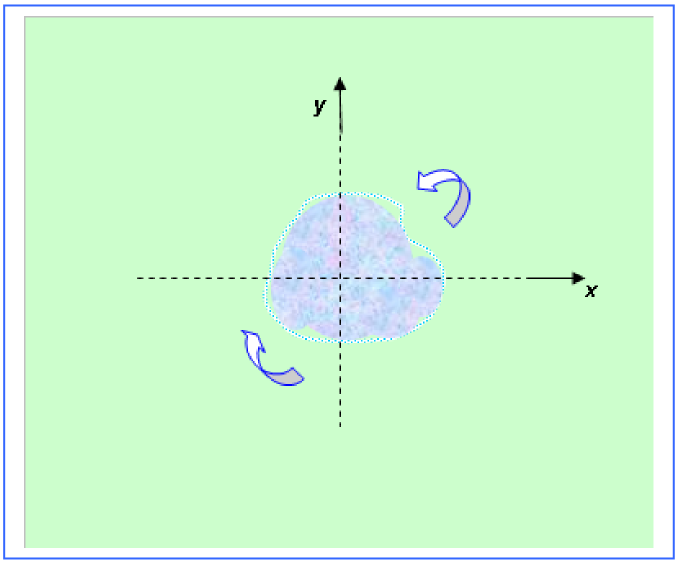


Figura 2.35: Movimenti possibili di un corpo rigido

In presenza di vincoli, è chiaro che uno dei suddetti movimenti viene ad essere impedito, cioè il corpo ha meno di tre gradi di libertà. Per esempio: un corpo imperniato ad un asse può ruotare, ma non traslare, cioè ha un solo grado di libertà: un vagone ferroviario non può ruotare, né può muoversi in una direzione diversa da quella del binario, per cui ha anch'esso un dolo grado di libertà.

La condizione di un corpo rigido soggetto a vincoli può essere:

- *labile*, se i vincoli non sono sufficienti a mantenere il corpo in equilibrio (fig. 2.36 a);
- *isostatica*, se i vincoli sono sufficienti (fig. 2.36b);
- *iperstatica*, se i vincoli sono sovrabbondanti (fig. 2.36c)

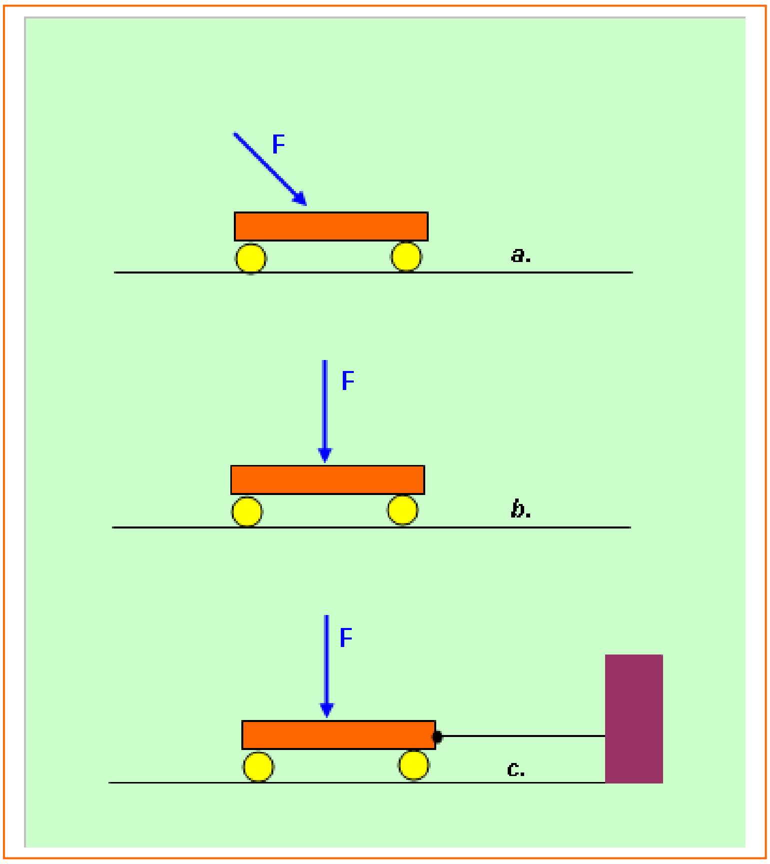


Figura 2.36: Condizioni a cui è soggetto un corpo rigido: Labile (a), Isostatica (b), Iperstatica (c).

Classificazione dei vincoli

Per comodità, distinguiamo i vincoli in tre tipi; si tratta di modelli teorici, i quali però trovano riscontro in pratica, come per esempio nell'ancoraggio di travi rigide.

1. **Appoggio semplice o appoggio scorrevole** (fig. 2.37), realizzato da un carrello con cerniera. Esso permette scorrimenti lungo il piano (movimenti che anzi possono essere facilitati da rulli), mentre è in grado di reagire soltanto in direzione normale al

suo piano, impedendo movimenti in tale direzione. L'appoggio semplice è quindi un vincolo con due gradi di libertà.

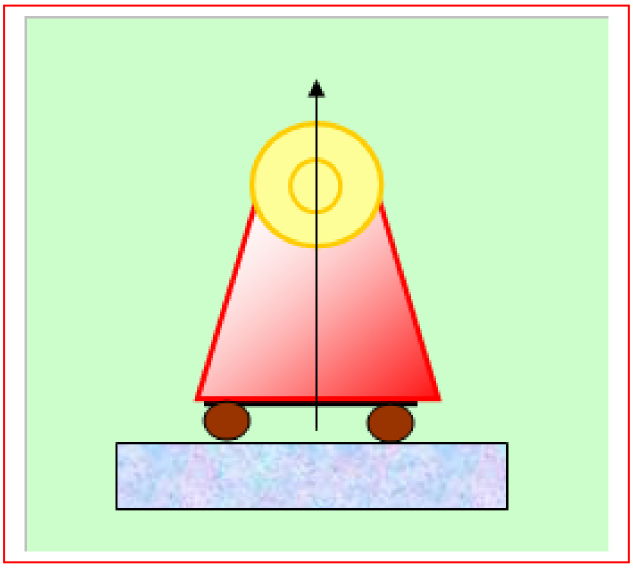


Figura 2.37: Appoggio semplice o scorrevole: reagisce soltanto in direzione normale al suo piano d'appoggio.

2. Cerniera (fig2.38); essa può reagire in qualsiasi direzione passante per il suo centro, per cui permette al corpo soltanto rotazioni intorno al centro stesso.

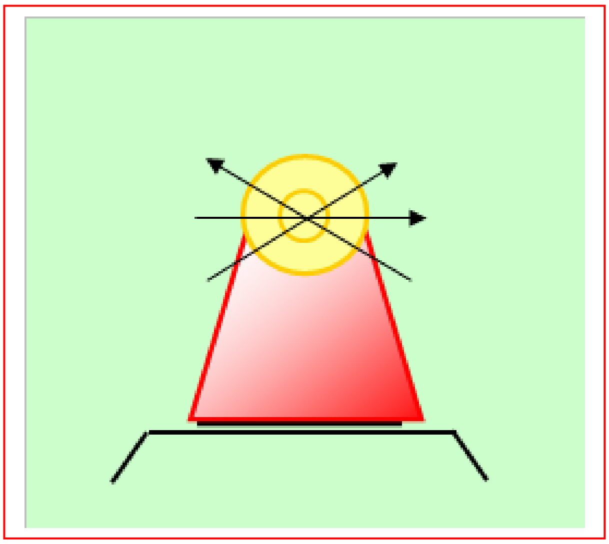


Figura 2.38: Cerniera: può reagire in qualsiasi direzione passante per il suo centro, permettendo soltanto rotazioni intorno ad esso.

Un esempio è costituito dalla porta, la quale non può traslare, ma solo ruotare intorno ai cardini. (La cerniera fissa è quindi un vincolo con un solo grado di libertà).

3. L'incastro (figura 2.39) non solo reagisce in qualsiasi direzione, ma è anche in grado di creare dei momenti reagenti, impedendo sia traslazioni che rotazioni. Un esempio è costituito da una sbarra orizzontale di acciaio, avente una estremità murata in una parete di cemento. Questo tipo di vincolo è tale da impedire qualunque movimento (zero gradi di libertà).

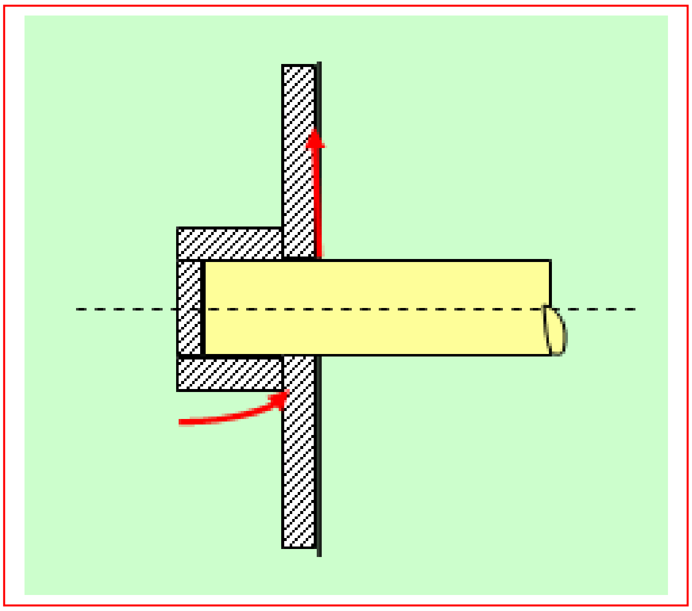


Figura 2.39: Incastro: reagisce in qualsiasi direzione e crea dei momenti di reazione, impedendo qualsiasi movimento.

In relazione, ai gradi di libertà precedentemente introdotti, è facile rendersi conto che l'appoggio semplice ne toglie uno (traslazione in una certa direzione); la cerniera ne toglie due (traslazione in qualunque direzione); l'incastro li toglie tutti e tre. Perciò per vincolare completamente un corpo, cioè per toglierli qualsiasi possibilità di movimento, occorrono tre appoggi (opportunatamente disposti), oppure un appoggio ed una cerniera, oppure un incastro.

3. LE MACCHINE SEMPLICI

Dopo aver studiato le condizioni di equilibrio a cui devono sottostare un punto materiale, un corpo rigido libero e vincolato, particolarmente interessante potrebbe essere rivolgere l'attenzione a qualche semplice applicazione delle condizioni di equilibrio già viste.

In particolare saranno descritti alcuni dispositivi sperimentali, chiamati **macchine semplici**, per mezzo dei quali si può equilibrare una forza, detta **resistenza,** con un'altra forza, chiamata invece **forza motrice** e talvolta impropriamente **potenza**, che differisce dalla prima per qualche suo elemento (per intensità, o per direzione o per retta d'azione).

Cosi, per esempio, una fune tesa da forze opposte applicate agli estremi non costituisce una macchina. Ma un semplice caso di equilibrio di forze opposte; ma se quella fune viene avvolta intorno ad un albero, allora costituisce una macchina, in quanto le forze applicate ai suoi estremi per mantenerla in equilibrio non saranno più opposte, ma avranno direzioni diverse, secondo l'angolo di avvolgimento, e, anche se parallele, apparterranno sempre a diverse rette d'azione.

Di queste macchine semplici che hanno permesso il progresso dell'umanità, **le leve** erano ben note ad Archimede (287-212 a.C.), che, mettendo a profitto le sue conoscenze tecniche, permise a Siracusa nel corso della seconda guerra punica di resistere ai romani per ben di due anni.

Della ricca e abusata aneddotica su Archimede uno dei detti più famosi riguarda proprio la leva:

"*Datemi un punto di appoggio e vi solleverò la Terra.*"

Ancora oggi in ogni officina, in ogni fabbrica, in ogni cantiere di lavoro vengono usate macchine semplici che sfruttano le condizioni di equilibrio.

Ai fini pratici sono particolarmente importanti quelle macchine che consentono di equilibrare una grossa resistenza mediante una piccola forza motrice;

ma ciò non significa che in certi casi non siano utili anche macchine che richiedano forze motrici di modulo pari o addirittura superiore a quello delle resistenze.

Si definisce ***Vantaggio statico di una macchina,*** *il rapporto****,*** *in condizioni di equilibrio, tra il modulo della resistenza e quello della forza motrice:*

$$V=R/F$$

Evidentemente si possono verificare tre casi:

- **R>F** e di conseguenza **V>1**: *La macchina è* ***vantaggiosa***.
  Naturalmente, il vantaggio della macchina sarà tanto più grande quanto maggiore risulta il rapporto tra le due forze. Tale concetto è pienamente intuitivo; infatti se si riesce ad equilibrare, ad esempio, una resistenza di 100 N con una forza motrice ("potenza") di 90 N, si avrà un vantaggio ("risparmiando" 10 N di sforzo); ma il vantaggio sarà maggiore se la forza motrice ("potenza") potrà limitarsi a 50 N. nel primo caso, infatti il vantaggio è di circa 1,1, nel secondo di 2;

- **R<F** e di conseguenza **V<1**: *La macchina è* **s*vantaggiosa***;

- **R=F** e di conseguenza **V=1**: *La macchina è* ***indifferente***.

Per equilibrare o vincere una certa resistenza si usano molto spesso dei dispositivi costituiti dall'associazione di due o più macchine semplici, ai quali si dà il nome di *macchine composte*.

3.1 Le leve

La **leva** è un corpo rigido capace di ruotare attorno ad un punto fisso detto *fulcro* (indicato con F) e può essere vantaggiosa o meno a seconda della posizione del fulcro rispetto alla forza motrice e alla resistenza.

Precisamente consideriamo la leva schematizzata in figura 3.1, in cui la forza motrice, **F,** e la resistenza, **R**, sono applicate in due punti distinti della leva; e giacciono entrambe in un piano ortogonale al fulcro (le due forze sono complanari).

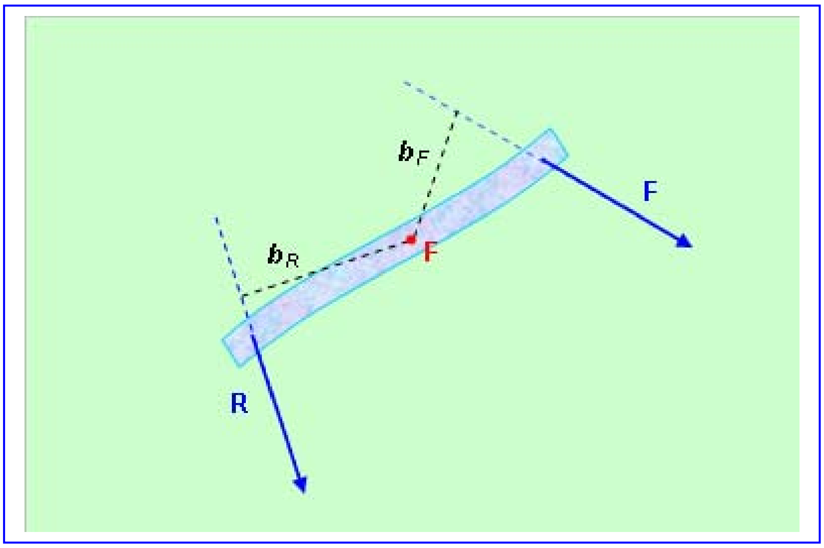


Figura 3.1: Schematizzazione di una leva

La condizione di equilibrio caratteristica della leva si può ricavare dal criterio generale dell'equilibrio di un corpo rigido girevole attorno ad un asse fisso:

"Un corpo rigido, girevole attorno ad un asse fisso, inizialmente in quiete, permane nel suo stato di quiete in ogni altro istante di tempo t (con $t>t_0$), sempre e soltanto quando il momento assiale risultante, ***M,*** *delle forze applicate al corpo è nullo rispetto al suddetto asse di rotazione. In formule:*

$$\boldsymbol{M} = 0\text{''}$$

Nella leva, quindi, per avere l'equilibrio debbono essere uguali e contrari i momenti di rotazione delle due forze agenti. Infatti la relazione precedente diventa:

$$\mathbf{M} = \mathbf{M}_R + \mathbf{M}_F = 0$$

ove M_R ed M_F indicano rispettivamente i momenti assiali della resistenza e della potenza rispetto al fulcro F della leva.

Questa equivale per definizione alla equazione scalare seguente:

$$[\mathbf{r}_R \wedge \mathbf{R}]\cdot \mathbf{k} + [\mathbf{r}_F \wedge \mathbf{F}]\cdot \mathbf{k} = 0$$

rispetto al riferimento galileiano ***Oijk*** mostrato in figura.

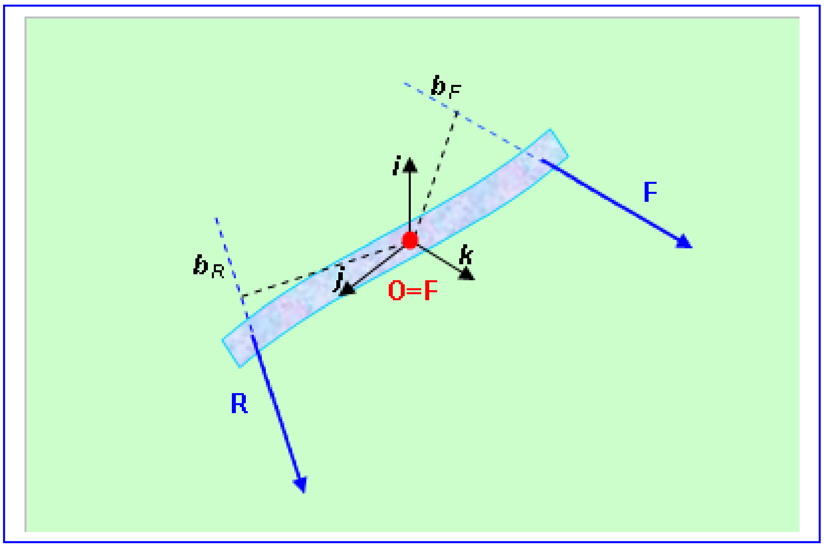


Figura 3.2: rappresentazione del sistema di coordinate ***Oijk***

Per cui, indicato con b_R e b_F, rispettivamente il braccio della resistenza, **R**, e della forza motrice, **F,** la relazione precedente, può essere scritta anche nella forma:

$$b_R \cdot R - b_F \cdot F = 0$$

che è equivalente alla relazione:

$$F : R = b_R : b_F$$

In definitiva:

$$\frac{F}{R} = \frac{b_R}{b_F}$$

Si determina la condizione di equilibrio della leva nei termini della seguente legge:

"*Per l'equilibrio della leva occorre e basta che l'intensità della resistenza e l'intensità della forza motrice stiano fra loro in rapporto inverso ai bracci della resistenza e della potenza*".

Dalla relazione precedente si vede che quando la leva si interpone tra la resistenza e la forza motrice in modo tale che il braccio della resistenza risulta minore del braccio della forza motrice, allora si dice che si ha vantaggio ad usare la leva o, ciò che è lo stesso, che la leva è vantaggiosa, perché in tal caso la leva equilibra la resistenza con una forza motrice di intensità minore di quella della resistenza (infatti se $b_r < b_F$ segue: $F < R$).

Dalla disposizione relativa del fulcro e dei punti di applicazione della resistenza e della forza motrice si distinguono tre tipi di leve:

a) **Leva di primo genere:** *Il fulcro si trova in una posizione intermedia tra il punto di applicazione della resistenza e della forza motrice*. In tal caso la leva è *vantaggiosa* se il braccio della forza motrice è maggiore del braccio della resistenza; *svantaggiosa* nel caso contrario ed *indifferente* se i due bracci sono uguali.

Nelle figure che seguono si riportano i tre casi considerati:

Leva di primo genere vantaggiosa ($b_R < b_F$: F<R)

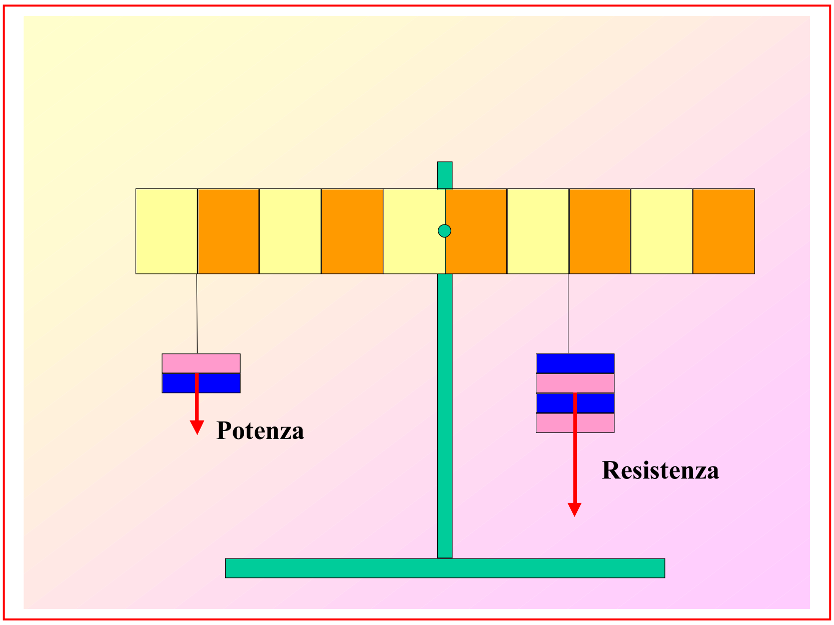


Figura 3.3: Leva di primo genere vantaggiosa.

La figura 3.4 mostra alcuni oggetti della vita pratica costruiti da leve di primo genere vantaggiose, come ad esempio le forbici da sarto:

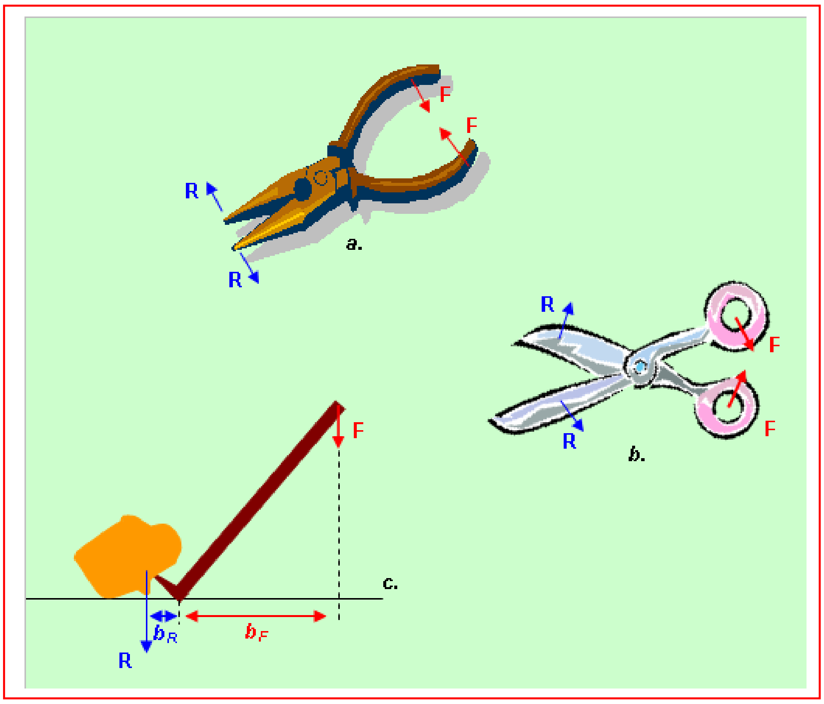


Figura 3.4: Esempi di leva di primo genere vantaggiosa: *a.* pinze; *b.* forbici da sarto; *c.* palanchino.

Oppure il palanchino, che altro non è che una leva utilizzata dagli operai per smuovere i macigni, caratterizzata da un lungo braccio della forza motrice per aumentarne il vantaggio,; oppure le tenaglie, in quanto esse hanno il braccio della forza motrice maggiore di quello della resistenza.

Leva di primo genere svantaggiosa ($b_R > b_F$: $F>R$)

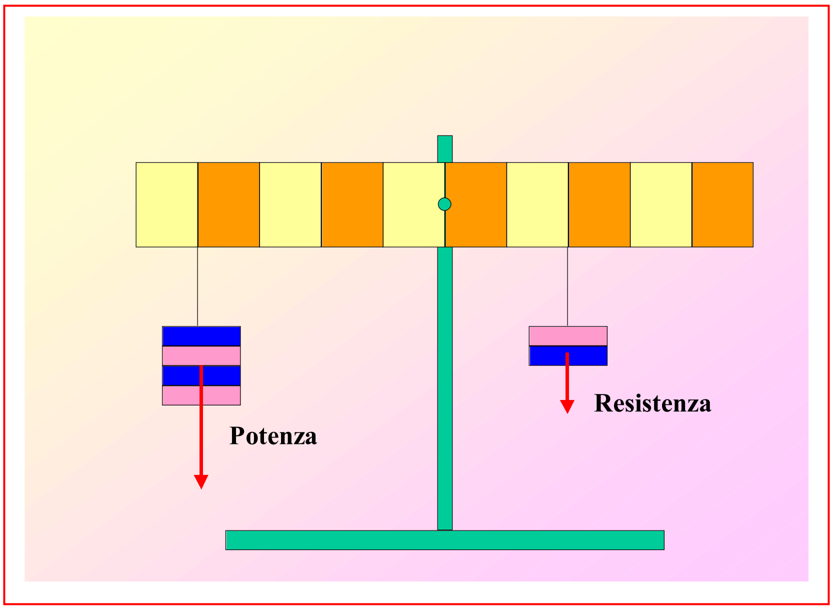


Figura 3.5: Leva di primo genere svantaggiosa.

Leva di primo genere indifferente ($b_R = b_F$: $F=R$)

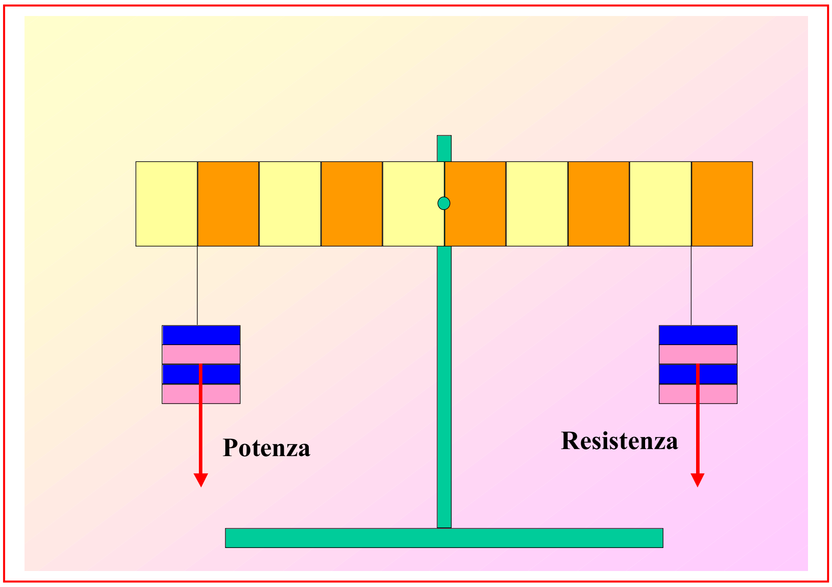
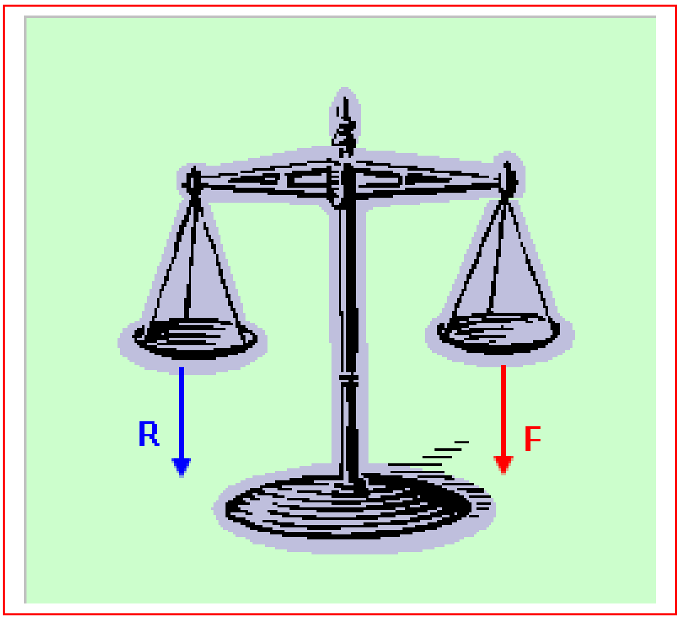


Figura 3.6: Leva di primo genere indifferente.

Un esempio particolare di leva di primo genere indifferente è rappresentato dalla *Bilancia a bracci uguali* che è comunemente utilizzata per il confronto di pesi, e quindi utilizzata per la misura del peso dei corpi.



b) **Leva di secondo genere o interresistente:** *Il punto di applicazione della resistenza è situato tra il fulcro ed il punto di applicazione della forza motrice.* In tal caso la leva è sempre *vantaggiosa.*

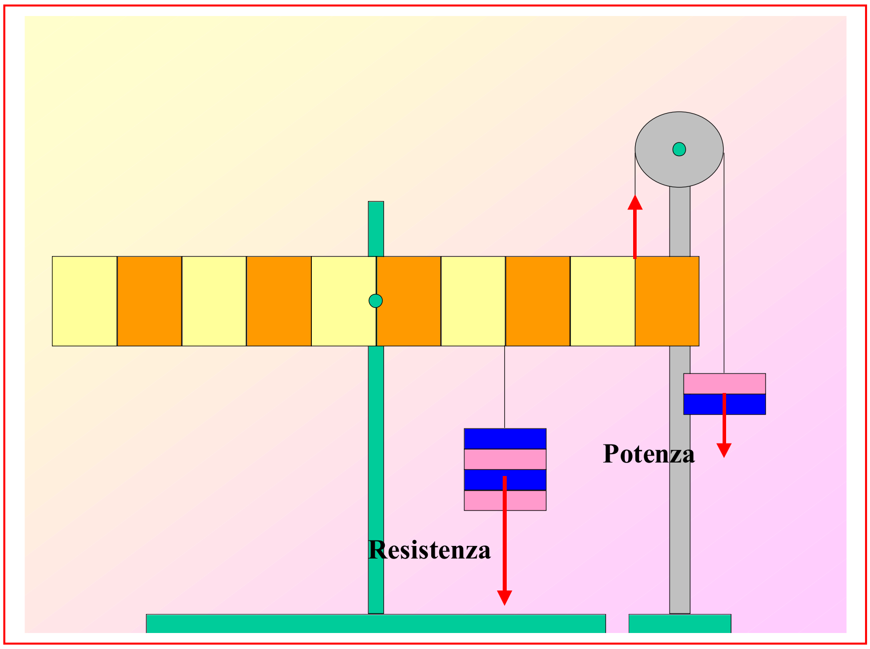


Figura 3.7: Leva di secondo genere o interresistente.

Esempi di leve di secondo genere: Schiaccianoci (fig. 3.8*a*); carriola (fig. 3.8*b*); remo della barca (fig. 3.8*c*);

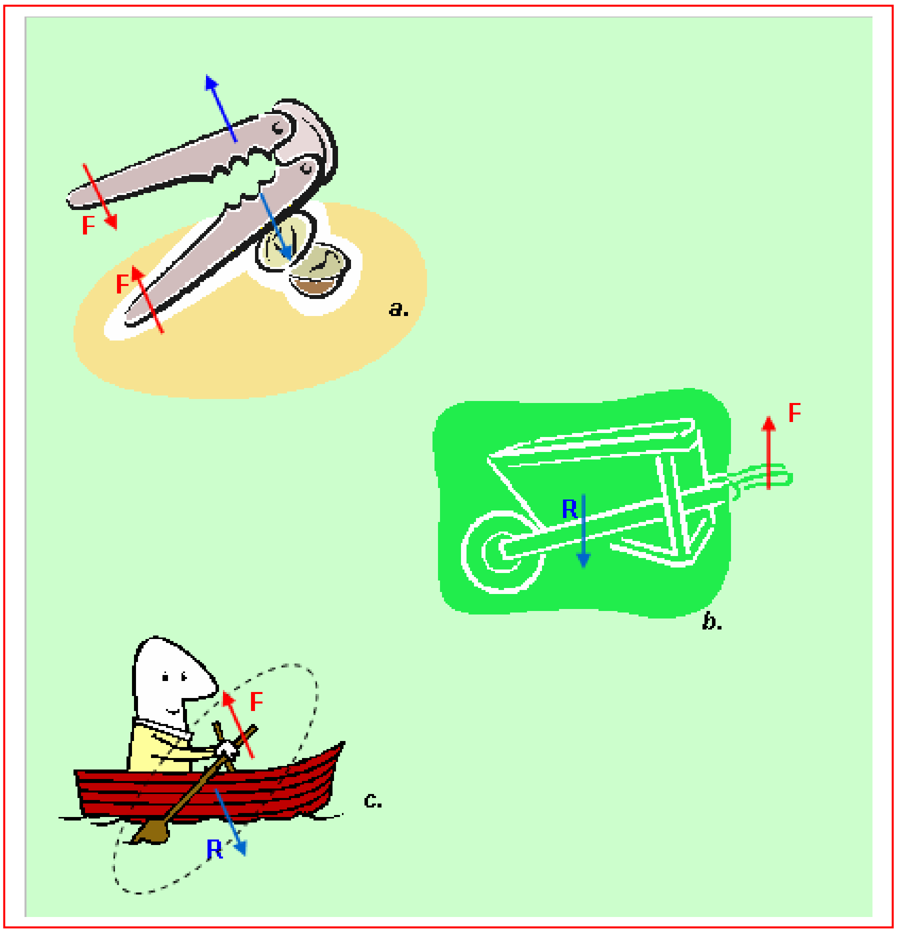


Figura 3.8: Esempi di Leve di secondo genere: carriola, schiaccianoci, remo della barca.

c) **Leva di terzo genere o interpotente:** *Il punto di applicazione della forza motrice è situato tra il fulcro ed il punto di applicazione della resistenza.* In tal caso la leva è sempre s*vantaggiosa.*

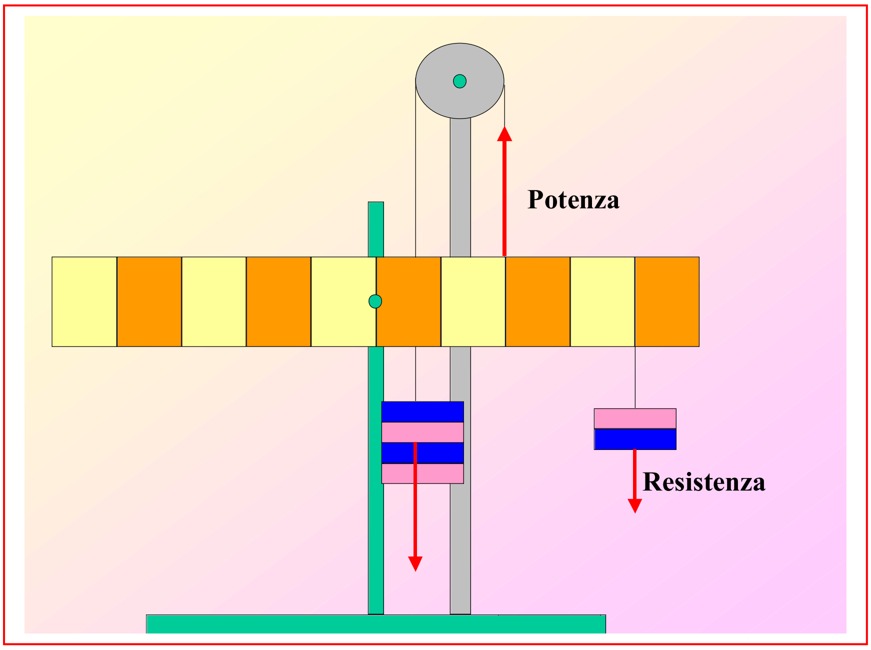


Figura 3.9: Leva di terzo genere o interpotente.

Esempi di leve di terzo genere: pinzette da orologiaio (fig. 3.10), molle e pedale della macchina

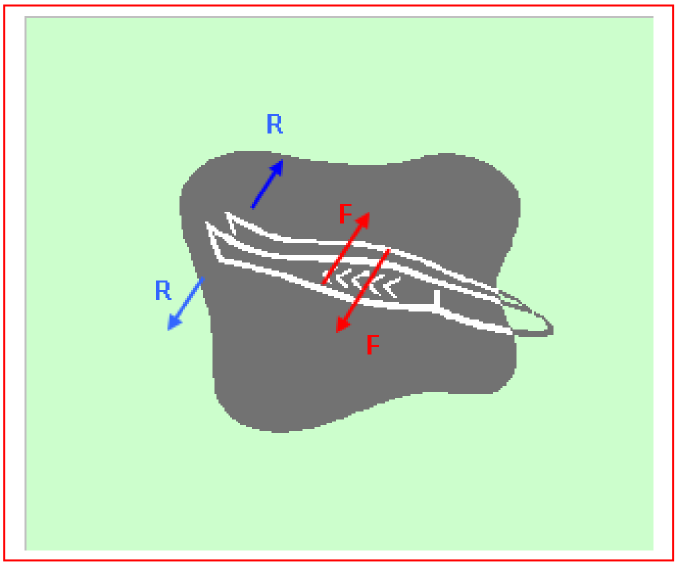


Figura 3.10: Esempio di leva di terzo genere: pinzette da orologiaio.

3.2 La Carrucola

In questo paragrafo ci si occuperà della carrucola fissa e di quella mobile, del paranco, ottenuto dalla combinazione di una carrucola fissa e di una mobile, ed infine del paranco composto.

La Carrucola Fissa

La carrucola fissa (figura 3.11) è costituita da una ruota (o disco) girevole attorno ad un asse fisso sostenuto da una lamina piegata a forma di U, chiamata staffa, sostenuta, a sua volta, da un gancio appeso ad un supporto fisso.

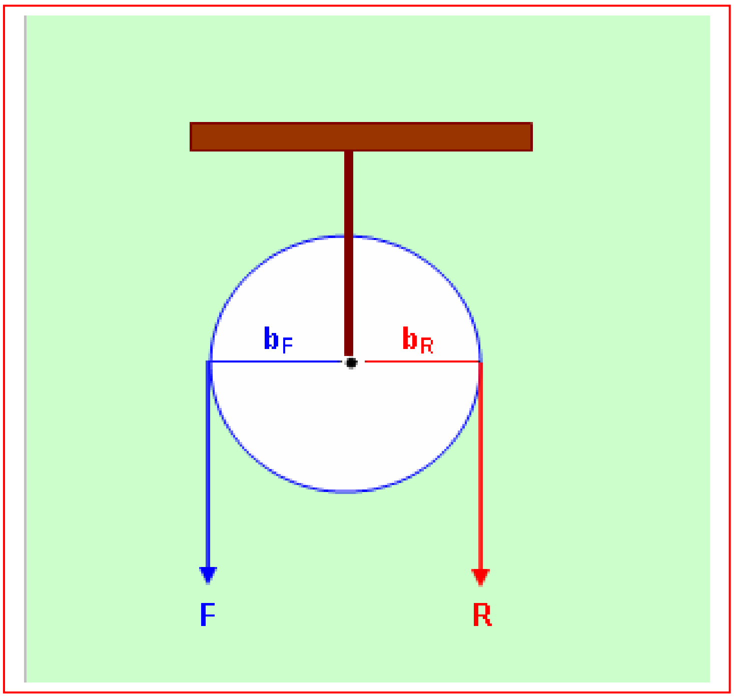


Figura 3.11: La carrucola fissa.

L'orlo della ruota, ovvero la sua superficie laterale minore, presenta una scanalatura, detta gola, nella quale scorre una fune. La resistenza, **R**, e la forza motrice, **F**, agiscono rispettivamente ai capi della fune, secondo direzioni che giacciono in un piano ortogonale all'asse di rotazione della ruota, ed i loro rispettivi bracci sono eguali entrambi ai raggi della ruota. La condizione di equilibrio caratteristica della carrucola fissa si può determinare anch'essa come per quella della leva; essendo che tale carrucola si può considerare come una leva di primo genere a bracci uguali (sostituiti dai raggi della carrucola), e quindi una leva indifferente.

Osservando la figura segue facilmente che, poiché il braccio della forza motrice è uguale al braccio della resistenza, in quanto, come già osservato, sono entrambi uguali al raggio della carrucola, il momento della resistenza sarà uguale al momento della forza motrice solo quando l'intensità della forza motrice è uguale a quello della resistenza. In formule:

$$\mathbf{M_R = M_F}$$

$$R \cdot b_R = F \cdot b_F$$

ed essendo $b_R = b_F =$ raggio r della carrucola, segue la legge dell'equilibrio della carrucola fissa:

"Per l'equilibrio della carrucola fissa occorre e basta che l'intensità della resistenza e l'intensità della forza motrice siano eguali tra loro. In formule:

$$R = F$$*".*

Questa macchina semplice offre, in definitiva, la possibilità di equilibrare una resistenza mediante una forza motrice egualmente intensa e di direzione qualsiasi. Infatti, la carrucola fissa cambia la direzione ed il verso di una forza, ma non il suo modulo.

Nella figura 3.12 sono rappresentate tre carrucole che portano sospeso lo stesso corpo di peso P. Nel punto A, in cui convergono gli estremi dei tre fili si trasmette lo stesso valore della forza peso P, ma con direzione e verso modificati.

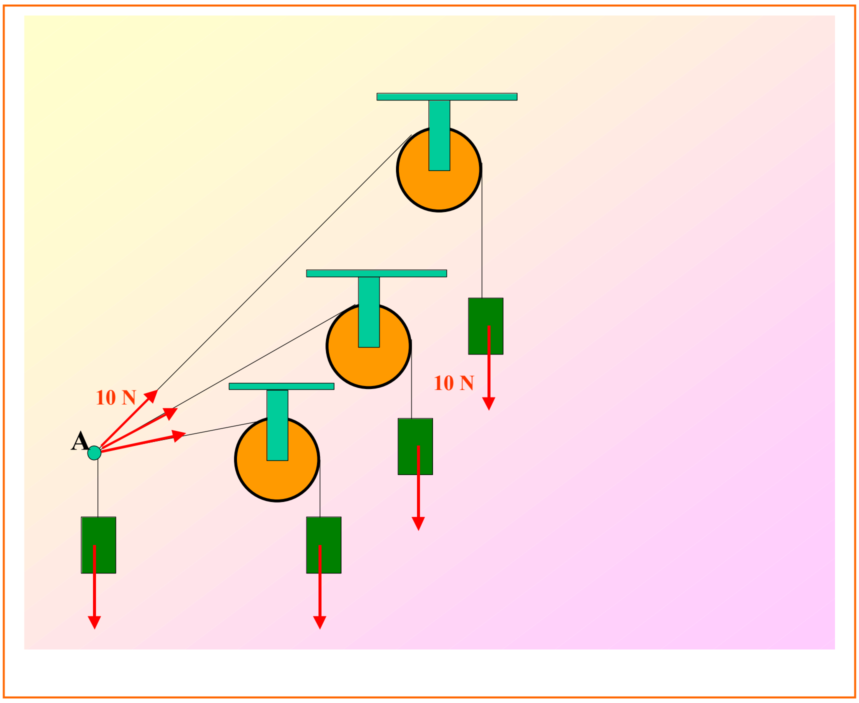


Figura 3.12: La carrucola fissa cambia la direzione della forza peso, ma non il modulo ed il verso.

La carrucola fissa è quindi una macchina indifferente, che però è di grande utilità, perché consente di fare agire la forza motrice secondo la direzione più conveniente, (come mostrato nella figura precedente).si pensi, per esempio, quanto una carrucola fissa renda più agevole la semplice operazione necessaria per attingere acqua da un pozzo.

Nella figura che segue, figura 3.13, si vede chiaramente, come due corpi uguali restano fermi in qualunque posizione essi si trovano l'uno rispetto all'altro.

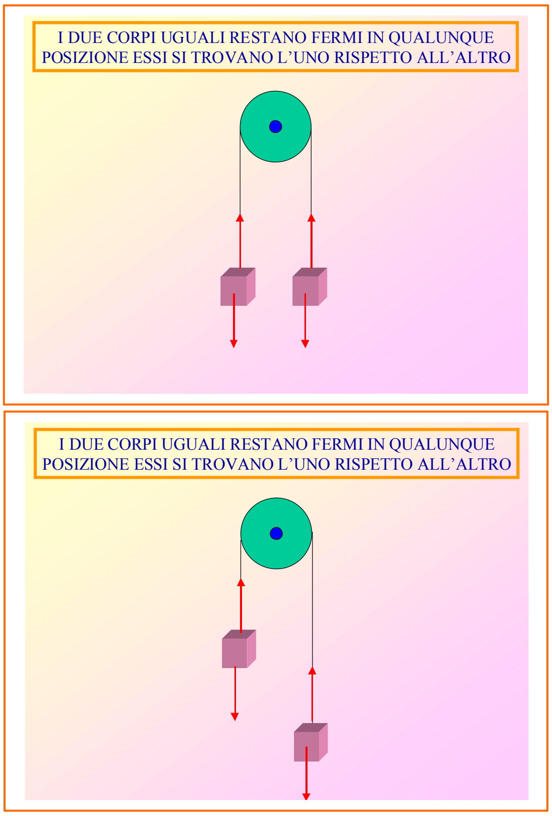


Figura 3.13: Due corpi uguali restano fermi in qualunque posizione essi si trovano l'uno rispetto all'altro.

La carrucola mobile

Anche la carrucola mobile è una macchina semplice, costituita da un disco girevole che si appoggia ad una estremità fissa della fune che passa nella sua gola (il punto di appoggio è il fulcro della carrucola); la resistenza è applicata alla staffa che passa per il centro della ruota, mentre la forza motrice si applica all'altra estremità della fune.

Nel caso che *i tratti di fune siano paralleli*, la carrucola tende a ruotare attorno al punto in cui si appoggia al tratto fisso della fune, ovvero attorno al fulcro. Tale macchina si può quindi considerare come *una leva di secondo genere*, avente per braccio della forza motrice il diametro del disco e per braccio della resistenza il raggio del disco.

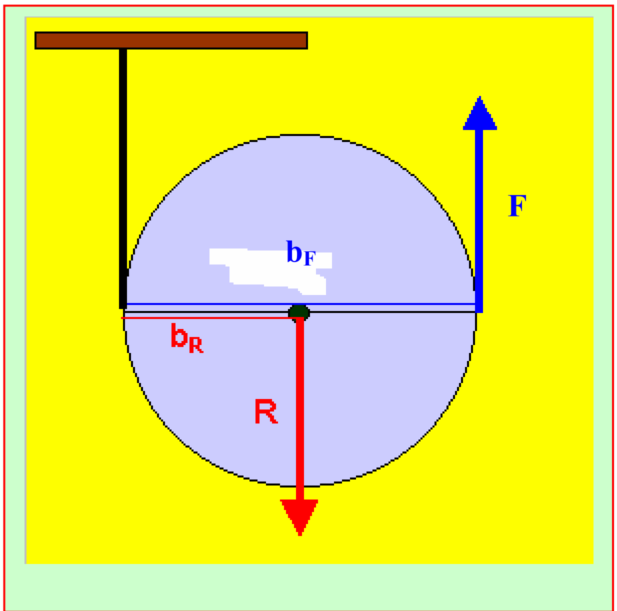


Figura 3.14: La carrucola mobile.

Osservando la figura, segue facilmente che, quando la potenza e la resistenza sono tra loro parallele, *la carrucola è una leva vantaggiosa*, perché, per avere equilibrio, occorre applicare una forza motrice pari alla metà della resistenza (V=2).

Ciò si giustifica per il fatto che il braccio della forza motrice è pari al doppio del braccio della resistenza. In formule:

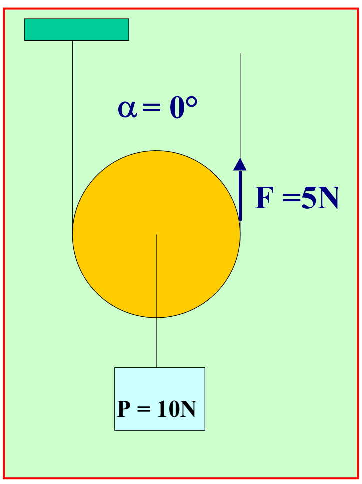
$$\mathbf{M_R = M_F}$$
$$R \cdot b_R = F \cdot b_F$$

ed essendo $b_F = 2b_R =$ 2 raggio r della carrucola, segue la legge dell'equilibrio della carrucola mobile nel caso di R ed F parallele:

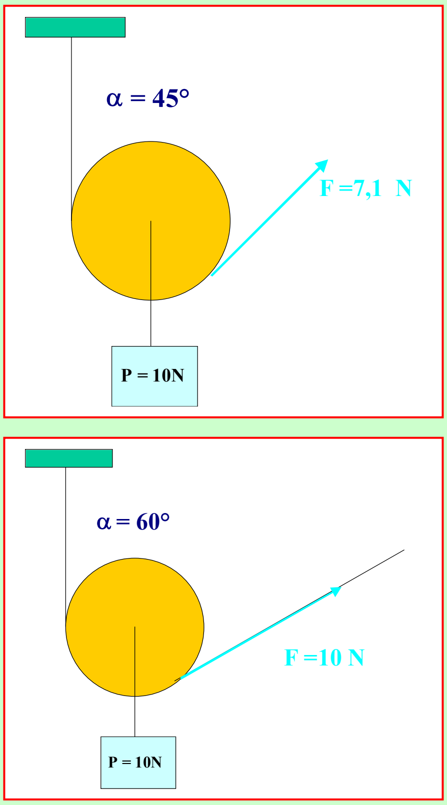
" Per l'equilibrio della carrucola mobile (con R ed F paralleli) occorre e basta che l'intensità della forza motrice eguagli la metà dell'intensità della resistenza. In formule:

F=R/2".

NOTA: La condizione di equilibrio è stata ricavata nel caso in cui la retta d'azione della resistenza e della forza motrice sono tra loro paralleli; ovvero l'angolo α, che la forza motrice forma con l'estremo fisso della fune, è uguale a zero. In tal caso la carrucola è vantaggiosa.



Quando però l'angolo α raggiunge il valore di 60°, la carrucola diventa indifferente (F=R) e per valori dell'angolo superiori a 60° essa diventa svantaggiosa. Indicando con P, il valore del peso applicato al centro del disco, ovvero la resistenza che si vuole "vincere", l'esperienza mostrata in figura 3.15 illustra quanto detto.



P = 10 N	
α	F
0	5,0
10	5,1
20	5,3
30	5,8
40	6,5
50	7,8
60	10,0
70	14,6
80	28,8
81	32,0
82	35,9
83	41,0
84	47,8
85	57,4
86	71,7
87	95,5
88	143,3
89	286,5

Figura 3.15: La carrucola mobile non è sempre vantaggiosa. Per angoli α, che la forza motrice forma con l'estremo fisso della fune, più grandi di 60° , la carrucola mobile diventa svantaggiosa.

Paranco

Il paranco è costituito da una carrucola mobile e da una fissa.
Con la carrucola mobile si applica una forza di valore pari alla metà della forza peso da sollevare (resistenza), mentre la carrucola fissa serve per sollevare il peso, come appoggio per la fune (come mostrato in figura 3.16).

Si deduce facilmente la condizione di equilibrio: F= R/2

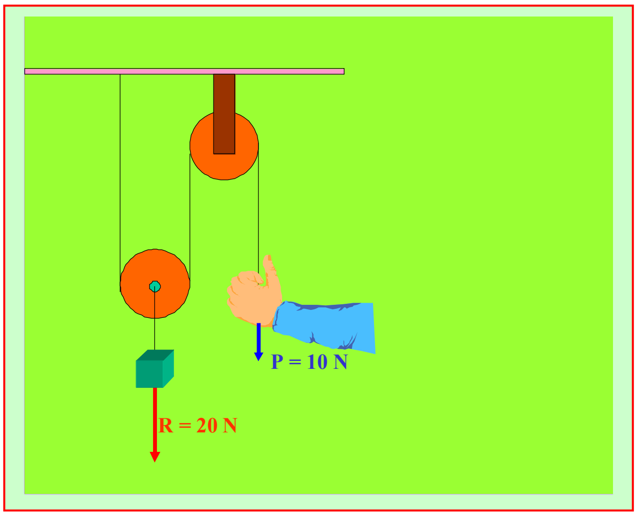


Figura 3.16: Il paranco.

Paranco composto

E' costituito da n carrucole mobili e da n carrucole fisse (figura 3.17) e consente di sollevare un peso P (resistenza) con una forza F pari a:

$$F = \frac{P}{2n}$$

essendo n il numero di carrucole mobili.

Infatti il numero di tratti di fune tesi tra le due staffe (ovvero quella fissa, a cui sono vincolate le carrucole fisse e quella mobile, a cui invece sono attaccate le carrucole mobili) risulta doppio del numero delle carrucole mobili, e poiché il carico (in tal caso il peso P) verrà ripartito in parti uguali fra questi capi della fune, e la forza motrice F deve equilibrare soltanto uno di essi, si può facilmente concludere che la forza motrice è uguale alla resistenza, divisa per il doppio del numero di carrucole mobili.

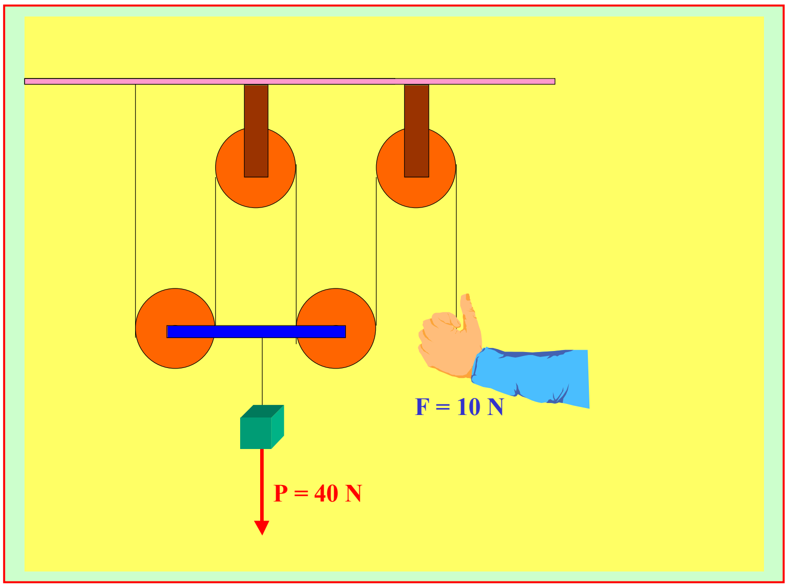


Figura 3.17: Il paranco composto.

Il vantaggio di tale macchina è pari a V=2n (essendo V=2, il vantaggio di una singola carrucola mobile con **F** ed **R** paralleli).

3.3 Il verricello

Il verricello è un corpo unico costituito da due cilindri coassiali di raggi differenti, portanti rispettivamente una fune avvolta in modo tale che lo svolgimento (avvolgimento) dell'una provoca l'avvolgimento (svolgimento) dell'altra.

Come si può facilmente osservare dalla figura 3.18, il sistema cosi costituito è girevole intorno all'asse fisso comune.

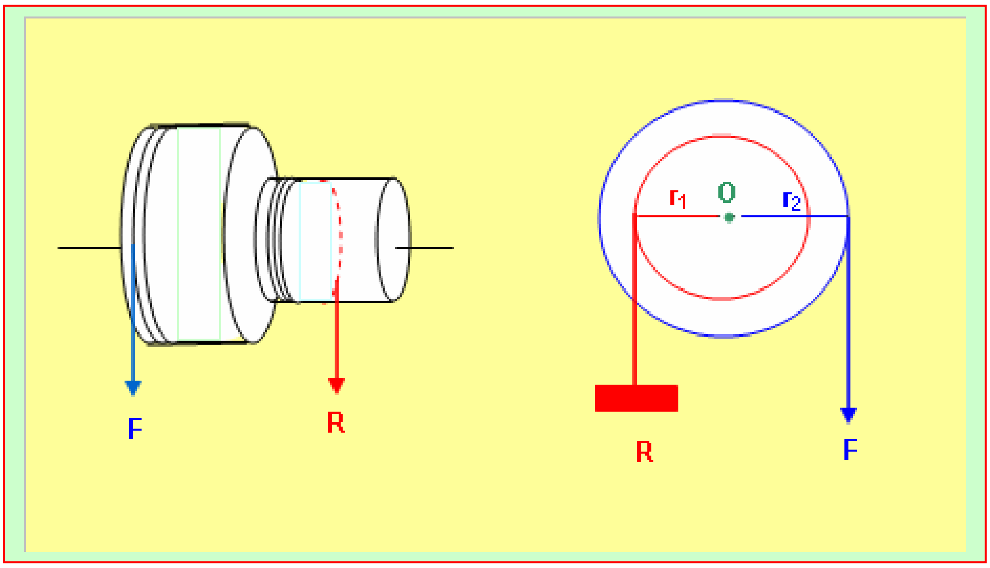


Figura 3.18: Il verricello.

La resistenza **R** viene applicata alla fune del cilindro di raggio minore, la forza motrice **F** all'altra. I bracci b_R e b_F della resistenza e della forza motrice coincidono in ampiezza rispettivamente con il raggio, r_1, del cilindro più piccolo e con quello, r_2, dell'altro cilindro. Come per la leva e la carrucola fissa, cosi anche per il verricello la sua condizione di equilibrio si trova mediante l'applicazione del criterio generale dell'equilibrio di un corpo rigido girevole attorno ad un asse fisso.

Tale condizione richiede che:

$$\frac{R}{F} = \frac{r_2}{r_1}$$

Tale legge dell'equilibrio del verricello si esprime nei termini seguenti:

"*Per l'equilibrio del verricello occorre e basta che l'intensità della resistenza e quella della forza motrice stiano in rapporto inverso ai raggi dei cilindri del verricello*".

Dello stesso principio del verricello è **l'asse della ruota**, che consiste in una ruota (di raggio r_2) fissata ad un asse cilindrico girevole (di raggio r_1). La schematizzazione di questo dispositivo è simile a quella del verricello, illustrata in figura 3.18.

Alla ruota è applicata la forza motrice e all'asse la resistenza; anche in tal caso si ha equilibrio quando la resistenza e la forza motrice sono inversamente proporzionali ai rispettivi raggi.

Tale dispositivo è particolarmente utilizzato sulle navi per salpare l'ancora, o anche nelle ruote dei veicoli. In quest'ultimo caso, la resistenza è data dalla forza di attrito della strada ed è applicata alla ruota, mentre la forza motrice è applicata dal motore dell'asse.

Si può facilmente osservare che tale macchina, cosi come il verricello, è tanto più vantaggiosa quanto più grande è il raggio della ruota rispetto a quello del cilindro. Infatti, essendo:

$$V = \frac{R}{F} = \frac{r_2}{r_1}$$

Segue che per $r_2 > r_1$, si ha $V>1$.

3.4 Il piano inclinato

Come ulteriore esempio di macchina semplice, sarà considerato un piano di appoggio inclinato rispetto al piano orizzontale; tale macchina prende il nome di *Piano inclinato*.

Schematicamente, visto in sezione, esso si può rappresentare con un triangolo rettangolo avente il cateto maggiore come base di appoggio e l'ipotenusa come profilo rettilineo ove i corpi possono venir lasciati liberi a se stessi.

In particolare, sarà trattata la condizione di equilibrio per un tal corpo, il cui peso, applicato al baricentro G, costituisce la resistenza.

Legge del Piano Inclinato con forza motrice parallela alla lunghezza

In figura è rappresentato un corpo, di peso P, appoggiato su un piano inclinato.

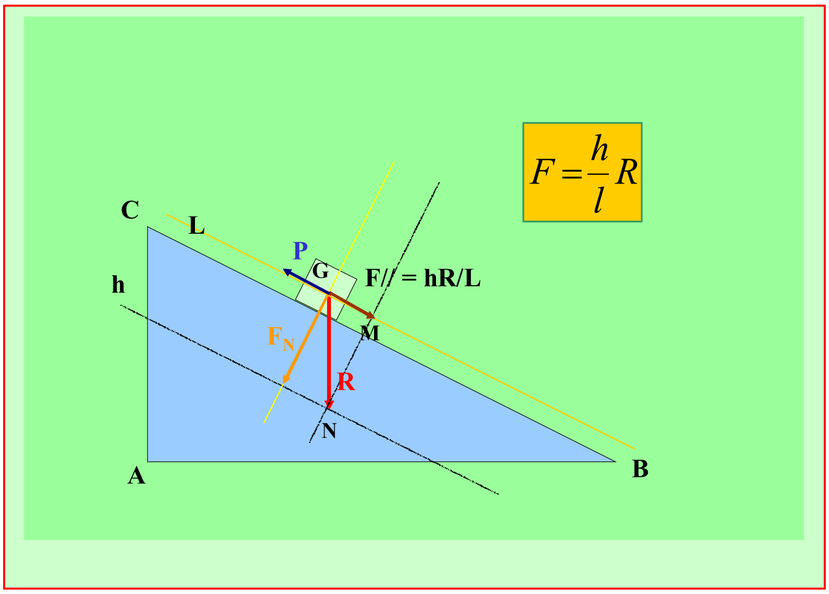


Figura 3.19: Piano inclinato- Forza motrice parallela al piano.

Per determinare la condizione di equilibrio a cui deve sottostare questo corpo, si scompone la forza peso (che rappresenta la resistenza, **R**) nelle due componenti: una parallela alla lunghezza del piano inclinato, $\mathbf{F}_{//}$, e l'altra perpendicolare al piano, $\mathbf{F_N}$.

La componente $\mathbf{F_N}$, perpendicolare al piano inclinato, viene neutralizzata dalla reazione vincolare del piano stesso.

Per equilibrare la componente $\mathbf{F}_{//}$, parallela alla lunghezza del piano inclinato, è invece necessario applicare nel baricentro G del corpo, una forza motrice **F**, avente la stessa direzione e lo stesso modulo di $\mathbf{F}_{//}$,ma verso contrario.

La determinazione della condizione di equilibrio si ottiene considerando i triangoli simili *ABC* ed *MNG* , e scrivendo la proporzione:

$$AC : BC = MG : NG$$

da cui, sostituendo i rispettivi valori:

$$h : l = F : R$$

ed infine:

$$F = R \cdot \frac{h}{l}$$

La legge dell'equilibrio di un corpo posto su di un piano inclinato (con forza motrice parallela alla lunghezza del piano) cosi trovata si esprime dicendo che:

"*Per l'equilibrio di un corpo posto su di un piano inclinato, con Forza motrice parallela alla lunghezza del piano, occorre e basta che l'intensità del peso del corpo e l'intensità di una forza motrice applicata allo stesso, stiano tra loro in rapporto, come l'altezza del piano inclinato sta alla lunghezza dello stesso*".

Il vantaggio di una tale macchina è il seguente:

$$V = \frac{R}{F} = \frac{l}{h}$$

ed essendo l>h, risulta V>1, cioè il piano inclinato (con la forza motrice parallela al piano stesso) è una macchina vantaggiosa.

NOTA: Il rapporto tra altezza e lunghezza del piano viene generalmente chiamato *pendenza* e si esprime in percentuale.

Esempio: Se vengono percorsi 3 Km su una strada rettilinea in salita e si raggiunge una località con altitudine di 60 m, la pendenza è del 2%.

Legge del Piano Inclinato con forza motrice parallela alla base

In figura è rappresentato un corpo, di peso P, appoggiato su un piano inclinato.

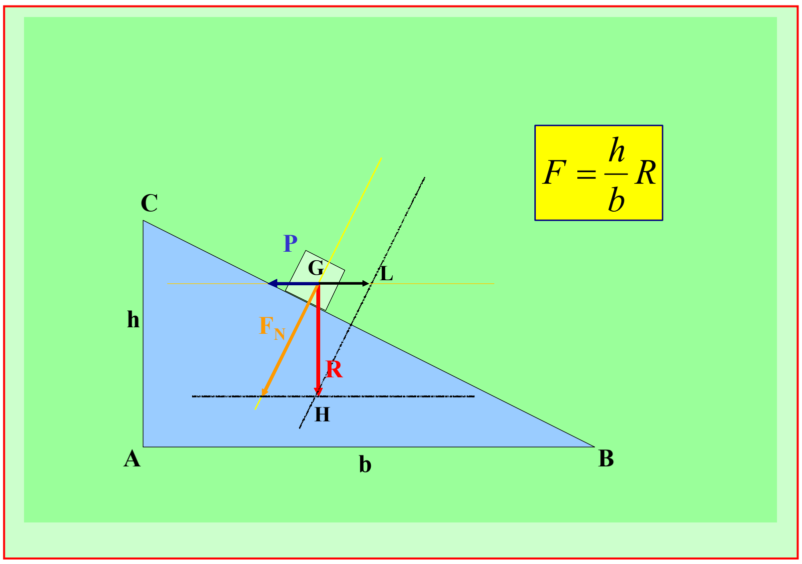


Figura 3.20: Piano inclinato - Forza motrice parallela alla base del piano.

Anche in questo caso, per determinare la condizione di equilibrio a cui deve sottostare il corpo, si scompone la forza peso (che rappresenta la resistenza, **R**) nelle due componenti: una parallela alla base del piano inclinato, $\mathbf{F}_{//}$, e l'altra perpendicolare al piano, $\mathbf{F}_{\mathbf{N}}$.

La componente $\mathbf{F}_{\mathbf{N}}$, perpendicolare al piano inclinato, viene neutralizzata dalla reazione vincolare del piano stesso; e quindi la sola forza da equilibrare è la componente $\mathbf{F}_{//}$, parallela alla base del piano inclinato.

Come nel caso precedente ciò è possibile, applicando nel baricentro G del corpo, una forza motrice **F**, avente la stessa direzione e lo stesso modulo di $\mathbf{F}_{//}$, ma verso contrario.

La determinazione della condizione di equilibrio si ottiene considerando i triangoli simili *ABC* ed *GHL* , e scrivendo la proporzione:

$$AC : AB = GL : GH$$

da cui, sostituendo i rispettivi valori:

$$h : b = F : R$$

ed infine:

$$F = R \cdot \frac{h}{b}$$

La legge dell'equilibrio di un corpo posto su di un piano inclinato (con forza motrice parallela alla base del piano) cosi trovata si esprime dicendo che:

"*Per l'equilibrio di un corpo posto su di un piano inclinato, con Forza motrice parallela alla base del piano, occorre e basta che l'intensità del peso del corpo e l'intensità di una forza motrice applicata allo stesso, stiano tra loro in rapporto, come l'altezza del piano inclinato sta alla base dello stesso".*

Il vantaggio di una tale macchina è il seguente:

$$V = \frac{R}{F} = \frac{b}{h}$$

In tal caso possono presentarsi tutti e tre i casi; in particolare per:

- b>h, risulta: V>1; macchina vantaggiosa;
- b<h, risulta: V<1; macchina svantaggiosa;
- b=h, risulta: V=1; macchina indifferente

NOTA: Le condizioni precedenti si ottengono facilmente, osservando che il rapporto tra l'altezza e la base del piano inclinato è uguale alla tangente dell'angolo α di inclinazione del piano stesso.

Pertanto, dalle considerazioni fatte, segue facilmente che la forza motrice può essere espressa dalla relazione:

$$F = R \tan g\alpha$$

Quindi se l'angolo di inclinazione α è minore di 45°, allora il paino è una macchina vantaggiosa, se è uguale a 45°, è indifferente, ed infine se è maggiore di 45°, allora il piano inclinato è una macchina svantaggiosa.

Le considerazioni fatte sugli angoli si possono dedurre facilmente anche da semplici schematizzazioni grafiche.

BIBLIOGRAFIA

1. Ugo Amaldi "*Il mondo della fisica*" Zanichelli
2. A. Caforio – A. Ferilli "*Physica per i licei scientifici-1-MECCANICA"* Le Monnier
3. La fisica del Berkeley *"Meccanica"* Zanichelli
4. Halliday-Resnick- Krane *"Fisica I"* Ambrosiana Milano
5. A. La Guidara – P. Cilmi "Physichè - Corso Interattivo di Fisica per le Scuole Superiori" Argo Software
6. R. Levis - T. Marra "*Corso di fisica 1*" Zanichelli
7. L. Miano – A. Corti *"FISICA ed esercitazioni 1"* Fabbri Editori
8. H. Morrison- P. Nobel *"Fisica Sperimentale*" Ferraro
9. Paride Nobel *"Da Galileo ad Oggi*" Ferraro
10. Eligio Perucca "*Fisica generale e sperimentale vol. I"* Scienze UTET
11. E. Ravagni – R. Cerruti Sola "*Fisica applicata*" Calderini;